Analyse 1

Gruppe G4-104 & G4-109
Department of Mathematics, Aalborg University, Denmark
Teacher: Morten Grud
2 pages

September 9, 2015

Opgave 62

Bevis ved induktion, at hvis $r \geq -1$, så gælder Bernoullis ulighed:

$$(1+r)^n \geq 1 + nr \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Basis~~-~~skridt:
Bevis for $n = 1$

$$\cancel{(1+r)^n \geq 1 + nr}$$
$$\cancel{\Updownarrow}$$
$$\cancel{(1+r)^1 \geq 1 + 1r}$$
$$\cancel{\Updownarrow}$$
$$(1+r)^1 = 1 + r \geq 1 + r. = 1+1r$$

$$\cancel{\square}$$

Induktion s skridt:
Antag at udtrykket er sand t for n, dvs. at følgende er sandt:

$$(1+r)^n \geq 1 + nr \quad \cancel{\text{for} \quad n \in \mathbb{N}.} \tag{1}$$

Det ~~vil~~ skal vises at dette også er gældende for $n+1$:

$$(1+r)^{n+1} \geq 1 + (n+1)r. \tag{2}$$

Ved at kigge på venstre side af ~~Ligning~~ (2) og benytte potensregneregler ~~kan~~ det ses, at

$$(1+r)^{n+1} = (1+r)^n(1+r)^1 = (1+r)^n(1+r). \tag{3}$$

Hvis betingelsen $r \geq -1$ er gældende, medfører dette at $(1+r) \geq 0$. Denne betingelse skal være opfyldt for at leddet ikke vil ændre på ulighedstegnet. I ~~Ligning~~ (1) kan der ganges med $(1+r)$ på begge sider af lighedstegnet, hvilket giver

hvorfor må man gange med (1+r) og bevare uligheden? (Henvisning!)

$$(1+r)^n(1+r) \geq (1+nr)(1+r) \tag{4}$$

$$\cancel{\Updownarrow} \qquad =$$

$$\cancel{(1+r)^n(1+r) \geq} \; 1+nr+r+nr^2. \tag{5}$$

Da $nr^2 \geq 0$ er følgende nødvendigvis sandt:

Hvorfor? (Henvisning!)

$$1+rn+r+nr^2 \geq 1+rn+r. \tag{6}$$

Dette medfører

$$(1+r)^n(1+r) \geq 1+nr+r \tag{7}$$

$$\Updownarrow$$

$$(1+r)^{n+1} \geq 1+(n+1)r. \tag{8}$$

$\square$

Ud fra dette kan det ses, at Bernoullis ulighed gælder når $r \geq -1$.