

Analyse 1

Gruppe G4-104 & G4-109

Department of Mathematics, Aalborg University, Denmark

Teacher: Morten Grud

2 pages

September 9, 2015

Opgave 62

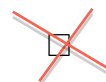
Bevis ved induktion, at hvis $r \geq -1$, så gælder Bernoullis ulighed:

$$(1+r)^n \geq 1+nr \quad \text{for } n \in \mathbb{N}.$$

Basis-skridt:

Bevis for $n = 1$

$$\begin{aligned} & \cancel{(1+r)^n \geq 1+nr} \\ & \updownarrow \\ & \cancel{(1+r)^1 \geq 1+1r} \\ & \updownarrow \\ & (1+r)^1 = 1+r \geq 1+r. = 1+1r \end{aligned}$$



Induktion **s** skridt:

Antag at udtrykket er sand **t** for n , dvs. at følgende er sandt:

$$(1+r)^n \geq 1+nr \quad \text{for } n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

skal

Det vil vises at dette også er gældende for $n+1$:

$$(1+r)^{n+1} \geq 1+(n+1)r. \quad (2)$$

Ved at kigge på venstre side af ~~Ligning~~ (2) og benytte potensregneregler ~~kan det ses~~, at

$$(1+r)^{n+1} = (1+r)^n(1+r)^1 = (1+r)^n(1+r). \quad (3)$$

Hvis betingelsen $r \geq -1$ er gældende, medfører dette at $(1+r) \geq 0$. Denne betingelse skal være opfyldt for at leddet ikke vil ændre på ulighedstegnet. I ~~Ligning~~ (1) kan der ganges med $(1+r)$ på begge sider af lighedstegnet, hvilket giver **hvorfor må man gange med $(1+r)$ og bevare uligheden?**

$$(1+r)^n(1+r) \geq (1+nr)(1+r) \quad \text{(Henviſning!)} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ & \underline{\underline{(1+r)^n(1+r) \geq 1+nr+r+nr^2.}} \quad (5) \end{aligned}$$

Da $nr^2 \geq 0$ er følgende nødvendigvis sandt: **Hvorfor? (Henviſning!)**

$$1+nr+r+nr^2 \geq 1+nr+r. \quad (6)$$

Dette medfører

$$(1+r)^n(1+r) \geq 1+nr+r \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ & (1+r)^{n+1} \geq 1+(n+1)r. \quad (8) \end{aligned}$$

Ud fra dette kan det ses, at Bernoullis ulighed gælder når $r \geq -1$. □