Analyse 1: Opgave 66 + 67

Gruppe G4-111

9. september 2015

Opgave 66 *Bevis, at* $r^2 \geq 0$ *for alle* $r \in \mathbb{R}$.

Bevises ved de tre mulige tilfælde, hvor (i) $r > 0$, (ii) $r = 0$ og (iii) $r < 0$.

(i) Antag, at $r > 0$. For et ordnet legeme gælder det for alle $r, s, t \in \mathbb{R}$ at

$$t > 0 \wedge r < s \Rightarrow tr < ts. \tag{1}$$

Da $r > 0$ vælges t i ligning (1) til at være r, hvilket multipliceres på begge sider af ulighedstegnet:

$$r \cdot r > 0 \cdot r \Rightarrow r^2 > 0$$

Derved er det bevist, at første tilfælde opfylder $r^2 \geq 0$.

(ii) Antag, at $r = 0$. Da $r = 0$ så er $r^2 = 0^2 = 0$, hvorved andet tilfælde opfylder $r^2 \geq 0$.

(iii) Antag, at $r < 0$. For $r, s, t \in \mathbb{R}$ gælder det (jævnfør opgave 63) at

$$t < 0 \wedge r < s \Rightarrow tr > ts \tag{2}$$

Da $r < 0$ vælges t i ligning (2) til at være r, hvilket multipliceres på begge sider af ulighedstegnet:

$$r < 0 \Rightarrow r \cdot r > 0 \cdot r \Rightarrow r^2 > 0$$

Derved opfylder tredje tilfælde at $r^2 \geq 0$.

Da det gælder i alle tre mulige tilfælde, er det bevist at $r^2 \geq 0$ for alle $r \in \mathbb{R}$. ■

Opgave 67 *Bevis, at hvis* $r > 0$, $s > 0$, *så gælder* $r < s \;\Leftrightarrow\; r^2 < s^2$ $(r, s \in \mathbb{R})$.

Lad $r > 0, s > 0$ og $r, s \in \mathbb{R}$. Beviset består af to dele:

1. Bevis at $r < s \Rightarrow r^2 < s^2$. Fordi $\mathbb{R}$ er et ordnet legeme gælder det at:

$$\forall r, s, t \in \mathbb{R} : t > 0 \wedge r < s \Rightarrow tr < ts \tag{3}$$

$$\forall r, s, t \in \mathbb{R} : r < s \wedge s < t \Rightarrow r < t \tag{4}$$

Ved at udnytte forhold (3) fås:

$$r < s \Rightarrow r \cdot r < s \cdot r$$
$$r < s \Rightarrow r \cdot s < s \cdot s$$

Ved brug af forhold (4) og den kommutative lov som gælder for ordnede legemer fås

$$r^2 < rs < s^2$$

2. Bevis at $r^2 < s^2 \Rightarrow r < s$. For at bevise dette bevises det kontrapositive udsagn $r \geq s \Rightarrow r^2 \geq s^2$. Dette bevises for de to mulige tilfælde:

   (a) Lad $r > s$. Ved at benytte samme fremgangsmåde som ovenfor, kan det let bevises at $r > s \Rightarrow r^2 > s^2$ og dermed er udsagnet sandt for det første tilfælde.

   (b) Lad $r = s$. Derved gælder det at $r \cdot r = r \cdot s = s \cdot s$ så $r^2 \geq s^2$ hvorved udsagnet også er sandt for det andet tilfælde.

   Fordi det kontrapositive udsagn er sandt i begge tilfælde er det oprindelige udsagn også bevist.

Da det er bevist at $r < s \Rightarrow r^2 < s^2$ og $r^2 < s^2 \Rightarrow r < s$, gælder det at $r < s \Leftrightarrow r^2 < s^2$ for $r > 0$, $s > 0$. $\blacksquare$