Opgave 76

a)

Vi har et interval $I =]a, b[$. Vi forskyder intervallet med $\sqrt{2}$ (et irrationelt tal): $I' =]a + \sqrt{2}, b + \sqrt{2}[$

Vi tager et rationelt tal q fra I':
$q = p + \sqrt{2}$, $p \in I$, så $q - p = \sqrt{2}$.

Hvis vi antager at p er rationelt, så må $q - p$ også være rationelt:
$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-db}{bd}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$
så $\sqrt{2}$ skal være et rationelt tal, hvilket det ikke er, altså må antagelsen være forkert og p er irrationelt.

I følge korollar 3.19 er der uendeligt mange rationelle tal i ethvert interval. Så der er uendeligt mange q og da der hører et p til alle q må der være uendeligt mange p.
Altså der er uendeligt mange irrationelle tal p i et givent interval.

b)

Vi har et interval $B =]a, b[\cap Irr$, vi vil først finde og bevise supremum af B, $Sup\ B$, og herefter $Inf\ B$.

I følge sætning 3.12 har supremum to krav:

- Supremum er en øvre grænse for et interval: $\forall x \in B : x \leq S$

- Supremum er den mindste øvre grænse: $\forall \epsilon \exists x \in B : x > S - \epsilon \quad , 0 < \epsilon < b - a$

Vi vil nu bevise at $Sup\ B$ hverken er $>$ eller $<$ b og derfor må være $=$ b:

$\underline{Sup\ B > b}$: b er en øvre grænse da $\forall x \in]a, b[: \quad x < b$. Dermed er $Sup\ B > b$ falsk.

$\underline{Sup\ B <}$ b: Vi antager at $Sup\ B < b$. Vi vælger at $c = max(a, Sup\ B)$. Da $Sup\ B < b$ er der et interval mellem $Sup\ B$ og b, hvori vi definerer et b':

$b' \in (c, b) \neq \emptyset$
Men $b' \in (c, b) \subseteq (a, b)$

Dvs. $b' \geq c \geq Sup\ B$, men så er $Sup\ B$ ikke en øvre grænse, hvilket er en modstrid.

Efter samme logik findes og bevises $Inf\ B$:

- Infinimum er nedre grænse for et interval: $\forall x \in B : x \geq I$

- Infinimum er den største nedre grænse: $\forall \epsilon \quad \exists x \in B : x < I + \epsilon \quad , \ 0 < \epsilon < b - a$

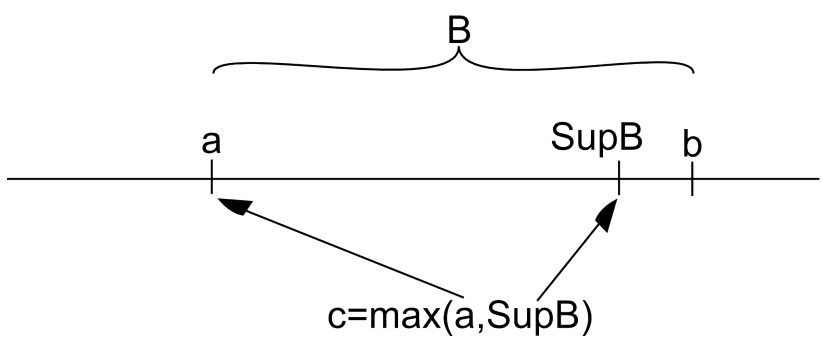
Vi vil nu bevise at $Inf\ B$ hverken er $>$ eller $<$ a og derfor må være $=$ a:

<u>$Inf\ B < a$</u>: a er en nedre grænse da $\forall x \in]a, b[: \quad x > a$. Derfor er $Inf\ B < a$ falsk.

<u>$Inf\ B$>a</u>: Vi antager at $Inf\ B > a$. Vi vælger at $c = min(b, Inf\ B)$. Da $Inf\ B > a$ er der et interval mellem a og $Inf\ B$, hvori vi definerer et a':

$a' \in (a, c) \neq \emptyset$
Men $a' \in (a, c) \subseteq (a, b)$

Dvs. $a' \leq c \leq Inf\ B$, men så er $Inf\ B$ ikke en øvre grænse, hvilket er en modstrid.



Figur 1: illustration til Opg.76b, hvor det vises at $Sup\ B < b$ er en modstrid.