Analyse 1: Opgave 7 (Noter)

G4-111

23. november 2015

Opgave 7 *Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og lad $f : A \to \mathbb{R}^m$. Vis at f er kontinuert i "$\varepsilon - \delta$- forstand" hvis og kun hvis f er kontinuert mellem de topologiske rum $(A, \mathcal{T}_A)$ og $(\mathbb{R}^m, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m})$ ifølge definition 1.3, hvor $\mathcal{T}_A$ er sportopologien (se definition 1.4).*

Først vises, at hvis f er kontinuert i "ε-δ-forstand", så er f kontinuert mellem de topologiske rum $(A, \mathcal{T}_A)$ og $(\mathbb{R}^m, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m})$. Antag derfor at f er kontinuert i "ε-δ-forstand", altså at

$$\forall a \in A : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A : ||x - a|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(a)|| < \varepsilon \tag{1}$$

Lad $a \in A$ være givet. Vælg $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m}$ så $a \in f^{-1}(U)$. Da gælder det at $f(a) \in U$. Da U er en åben mængde, findes der et $\varepsilon > 0$ sådan, at $B_\varepsilon(f(a)) \subseteq U$. (1) giver at

$$\exists \delta > 0 : x \in B_\delta(a) \cap A \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(a)) \subseteq U$$

Heraf følger det at $B_\delta(a) \cap A \subseteq f^{-1}(U)$. Heraf ses det, at a er et indre punkt, og da dette var vilkårligt valgt, er alle punkter indre punkter. Det betyder, at $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_A$. Altså er f kontinuert mellem de topologiske rum $(A, \mathcal{T}_A)$ og $(\mathbb{R}^m, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m})$.

Dernæst vises, at hvis f er kontinuert mellem de topologiske rum $(A, \mathcal{T}_A)$ og $(\mathbb{R}^m, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m})$, så er f kontinuert i "ε-δ-forstand". Antag derfor, at f er kontinuert mellem de topologiske rum $(A, \mathcal{T}_A)$ og $(\mathbb{R}^m, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m})$, dvs. for en mængde U gælder det jævnfør definition 1.3 at

$$U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m} \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_A \tag{2}$$

Lad $a \in A$ og $\varepsilon > 0$ være givet. Det gælder at $B_\varepsilon(f(a)) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m}$. Deraf følger det af antagelsen at

$$B_\varepsilon(f(a)) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m} \Rightarrow f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \in \mathcal{T}_A$$

For et $L \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ følger det af definition 1.4 at $f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) = L \cap A$. Da $a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ gælder det at $a \in L$, hvorved det gælder at $\exists \delta > 0 : B_\delta(a) \subseteq L$. Derved gælder det at

$$B_\delta(a) \cap A \subseteq L \cap A \Rightarrow B_\delta(a) \cap A \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \Rightarrow f(B_\delta(a) \cap A) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$$

Derved gælder det at

$$\forall a \in A \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in B_\delta(a) \cap A \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

hvorved f er kontinuert i "ε-δ-forstand".

$\blacksquare$