83 - Karakterisation af intervaller

I denne opgave skal du bevise, at hvis A er en delmængde af $\mathbb{R}$ med følgende egenskab:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad x, y \in A \text{ og } x < z < y \quad \Rightarrow \quad z \in A \tag{1}$$

så er A enten et interval eller en mængde bestående af ét element. Antag derfor, at A opfylder (**??**) og at A indeholder mere end ét element.

a)

(a) Betragt først det tilfælde, hvor A er både opad og nedad begrænset, og sæt $\alpha = \inf A$, $\beta = \sup A$.
(a1) Bevis, at $\alpha < \beta$ og at $A \subseteq [\alpha, \beta]$
Bevis
Da A er ikke-tom og indeholder mere end ét element gælder at minimum indeholder to elementer, hvorom der gælder $a_1 \neq a_2$.

I følge Definition 3.1 (Ordnet mængde) har vi om ethvert par af elementer x, y i den ordnede mængde M:

$$x, y \in M : \quad x < y \quad \vee \quad x = y \quad \vee \quad y < x$$

Vi vælger a_1 sådan at

$$\forall a \in A : a_2 \leq a$$

På samme måde vælger vi a_2 således at

$$\forall a \in A : a_1 \geq a$$

Fra infimum- og supremum-egenskaben har vi at:

$$\forall a \in A : a \geq \alpha, a \leq \beta$$

Hvormed

$$\alpha \leq a_2 < a_1 \leq \beta \Rightarrow \alpha < \beta \tag{2}$$

Herefter følger det direkte af Definition 3.25 (3.15):
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ at

$$A \subseteq [\alpha, \beta] \tag{3}$$

$\blacksquare$

(a2) Bevis, at $]\alpha, \beta[\subseteq A$

Bevis

Jf. Definition 3.19 er der uendeligt mange tal i $]\alpha, \beta[$

Det betyder sammen med Definition 3.25 (3.18) at der findes et c således at

$$c \in]\alpha, \beta[: \alpha < c < \beta$$

Vi kan ligeledes vælge et ϵ sådan at

$$\exists \epsilon > 0 : \alpha < c + \epsilon < \beta$$

Fra Sætning 3.11(e) gælder

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \; a \in A : a + \epsilon > \beta$$

Dette betyder at vi kan komme vilkårligt tæt på β og dermed

$$\exists y \in A : \beta > y > c \tag{4}$$

Ligeledes findes et ϵ'

$$\exists \epsilon' > 0 : \alpha < c - \epsilon' < \beta$$

Ved brug af 3.11(e) kan vi komme vilkårligt tæt på α sådan at

$$\forall \epsilon' > 0 \; \exists \; a \in A : a - \epsilon' < \alpha$$

og dermed

$$\exists x \in A : \alpha < x < c \tag{5}$$

Vi har fra Defintion 3.25 (3.18) at

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

Dette viser sammen med (**??**) og (**??**) at et ethvert tal i $]\alpha, \beta[$ også findes i A

$$]\alpha, \beta[\subseteq A$$

$\blacksquare$

(a3) Slut af (a1) og (a2), at A er et interval.

Vi har fra ovenstående beviser at

$$]\alpha, \beta[\subseteq A \subseteq [\alpha, \beta] \tag{6}$$

Derfor er A et interval.

b)

Betragt så det tilfælde hvor A er nedad, men ikke opad begrænset, og sæt $\alpha = \inf A$
Vis først at $A \subseteq [\alpha, \infty[$ og derefter, at $]\alpha, \infty[\subseteq A$.

Postulat: $A \subseteq [\alpha, \infty[$

Bevis. Ud fra infimum-egenskaben (3.14):

$$\forall\, a \in A : a \geq \alpha$$

Yderligere

$$\forall\, a \in A : a \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{N}$ er ikke opad begrænset. Dermed ifl. Archimedes' princip (3.17):

$$\forall\, r \in \mathbb{R}\ \exists\, n \in \mathbb{N} : n > r.$$

Fra ovenstående følger

$$\forall\, a \in A\ \exists\, n \in \mathbb{N} : n > a$$

Fra 3.25 (3.16) fås $A \subseteq [\alpha, \infty[$ □

Bevis. $]\alpha, \infty[\ \subseteq A$

$$]\alpha, \infty[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \infty\}$$

Jf. 3.19 er der uendelig mange tal i $]\alpha, \infty[$.

$$\exists\, c \in\ ]\alpha, \infty[\ : \quad \alpha < c < \infty$$

Dermed

$$\exists\, \epsilon > 0 : \alpha < c - \epsilon$$

Fra 3.11 e) haves

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, x \in A : x - \epsilon < \alpha$$

Da $x - \epsilon < \alpha$ og $\alpha < c - \epsilon$ må der gælde at $x < c$ Ethvert element mindre end c vilkårligt tæt på α er altså indeholdt i A. For at vise at ethvert element større end c også er indeholdt i A antages for modstrid:

$$\forall\, y \in A\ \exists\, c \in\ ]\alpha, \infty[\ : c > y$$

Fra definitionen 3.6 er c en øvre grænse for A men ifl. formuleringen er A ikke opad begrænset. Hvilket er en modstrid.
Hvormed

$$\exists y \in A : y > c$$

Derfor gælder det

$$\forall c \in]\alpha, \infty[\ \exists x, y \in A : x < c < y \quad \Leftrightarrow \quad]\alpha, \infty[\subseteq A$$

$\square$

c)

Betragt endelig de to tilfælde, hvor A ikke er nedad begrænset

For $A \subseteq \mathbb{R}$ og $\beta = \sup A$.
Vis at $A \subseteq \,] - \infty, \beta]$ hvor $] - \infty, \beta] = \{x \in \mathbb{R} | - \infty < x \leq \beta\}$

Bevis
Fra definitionen for Supremum må der gælde at

$$\forall a \in A : a \leq \beta$$

Endvidere vil vi vise at

$$\forall a \ \in A \ \exists n \in] - \infty, \beta] : \ n < a$$

Vi udvælger os et $a \in A : a < 0$. Vi sætter $a' = -a$. Jævnfør Sætning 3.17 må følgende gælde

$$\exists n \in \mathbb{N} : n > a'$$

Ved at benytte Sætning 3.20 kan vi konkludere at

$$-n < -a' = a$$

Specielt gælder det hvis $a \geq 0$ $(\beta \geq 0) : -1 \in] - \infty, \beta]$
Så er $-1 < a$
Hermed er det bevist at $A \subseteq \,] - \infty, \beta]$

$\blacksquare$

For $A \subseteq \mathbb{R}$ og $\beta = \sup A$.
Vis at $]-\infty,\beta[\ \subseteq A$ hvor $]-\infty,\beta[= \{x \in \mathbb{R}| -\infty < x < \beta\}$

Bevis
Jf. Sætning 3.19 er der uendeligt mange tal i $]-\infty,\beta[$.
Vi vælger nu et c i intervallet

$$c \in\ ]-\infty,\beta[\ : -\infty < c < \beta$$

Vi vil nu finde et ϵ hvorom det gælder at

$$c < c + \epsilon < \beta$$

Ved hjælp af Sætning 3.11 e)

$$\forall \epsilon > 0\ \exists a \in A : a + \epsilon > \beta$$

må et sådant ϵ medfører $\exists a \in A : a + \epsilon > \beta$ ($\Rightarrow a > c$).

Antag nu for modstrid at $\exists c \in\ ]-\infty,\beta[\ \forall a \in A : c < a$ Efter definition 3.13 er c en nedre grænse for A men i følge formuleringen er A ikke nedad begrænset og der opstår da en modstrid. Derfor må $\exists a \in A : a < c$.

$\blacksquare$

Vi betragter nu det tilfælde hvor A hverken er nedad eller opad begrænset. Vi viser nu at A er et interval:
Sætning:
Hvis A ikke er opad eller nedad begrænset, gælder: $A \subseteq\ ]\text{-}\infty,\infty[$

Bevis:
Vi starter med at vise følgende:

$$\forall a \in A\ \exists n \in]\text{-}\infty,\infty[\ : n > a$$

Udfra Sætning 3.17 og antagelsen om at $A \subseteq \mathbb{R}$, gælder:

$$\forall a \in A\ \exists n \in \mathbb{N}\ : n > a \Rightarrow \forall a \in A\ : a < \infty$$

Vi har nu vist at der, for ethvert $a \in A$ findes et tal i]-∞, ∞[der er større, vi viser nu følgende: $\forall a \in A \ \exists n \in]$-$\infty, \infty[: n < a$

Vi ved fra Sætning 3.20 at følgende gælder:

$$r < s \Leftrightarrow -r > -s$$

Vi tager nu et $a \in A \ : a < 0$, og sætter $a' = -a$. Jf. Sætning 3.17 gælder så:

$$\exists n \in \mathbb{N} \ : n > a' \Rightarrow -n < -a' = a$$

Specielt gælder at $-1 \in]$-$\infty, \infty[$, så hvis $a \geq 0$, da er $-1 < a$

Vi har derved vist at der for ethvert $a \in A$ findes et tal i]-∞, ∞[der er mindre end a.

$\blacksquare$

Sætning:
Hvis A ikke er opad eller nedad begrænset, gælder:]-$\infty, \infty[\subseteq A$

Bevis:
Vi vil vise at hvis -$\infty < c < \infty$ så eksisterer der $x, y \in A \ : x < c \wedge y > c$
Vi starter med at antage for modstrid, at der for et $c \in]$-$\infty, \infty[$ gælder:

$$\nexists a \in A \ a < c \Rightarrow \forall a \in A \ : a \geq c$$

Men da er c jf. Definition 3.13 en nedre grænse for A, hvilket er i modstrid med at A ikke er nedad begrænset.

Ligeledes kan vi nu antage for modstrid at der for et $c \in]$-$\infty, \infty[$ gælder:

$$\nexists a \in A \ : a > c \Rightarrow \forall a \in A \ : a \leq c$$

Men da er c jf. Definition 3.6 en øvre grænse for A, hvilket er i modstrid med at A ikke er opad begrænset.

$\blacksquare$

Vi konkluderer udfra foregående at A er et interval.