Chapter 1

Opgave 90 - Klemmelemma

Lad $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ være reele talfølger således at x_n er klemt inde mellem a_n og b_n. Dvs.

$$a_n \leq x_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Bevis, at hvis talfølgerne $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergente med den samme grænseværdi c, så er $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ også konvergent med grænseværdi c.

Vi vil bevise at $x_n \to c$ for $n \to \infty$. Lad $\varepsilon > 0$. Vi ønsker at finde $N \in \mathbb{N}:$ således at $\forall n \geq N :\mid x_n - c \mid < \varepsilon$
Men der gælder at
$\mid x_n - c \mid < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - c < \varepsilon$
Vi har fra antagelserne at
$\exists\ N_a \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_a :\mid a_n - c \mid < \varepsilon \Leftrightarrow$
$\exists\ N_a \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_a : -\varepsilon < a_n - c < \varepsilon$
Og
$\exists\ N_b \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_b :\mid b_n - c \mid < \varepsilon \Leftrightarrow$
$\exists\ N_b \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_b : -\varepsilon < b_n - c < \varepsilon$
Ifl. antagelserne i Klemmelemmaet gælder der

$$a_n \leq x_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Heraf følger $N = max(N_a, N_b)$ afparerer det givne ϵ således at
$\forall n \geq N : -\varepsilon < a_n - c \leq x_n - c \leq b_n - c < \varepsilon$
Altså $x_n \to c$ for $n \to \infty$.