Opgave 92

Opgavebeskrivelsen:

Lige så vel som det i definitionen af konvergens af en talfølge er nok at se på små ε (se Eksempel 4.9), er det nok at se på "store" N, hvormed vi vil forstå $N \geq N_0$, hvor $N_0 \in \mathbb{N}$ er et eller andet givet tal.
Lad os for at være konkrete sætte $N_0 = 10^6$.
Bevis, at $a_n \to a$ for $n \to \infty$, hvis og kun hvis:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \geq 10^6 \; \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a - a_n| < \varepsilon.$$

Besvarelsen:

Der tages udgangspunkt i *Definition 4.2 (Konvergens af talfølge)*, som siger, at en talfølge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent, hvis der eksisterer et tal a således:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a - a_n| < \varepsilon.$$

Ydermere har vi notationen fra opgavebeskrivelsen, som siger:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \geq 10^6 \; \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a - a_n| < \varepsilon.$$

Først bevises "hvis" ($\Uparrow$).
Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Så findes et N, hvorom det gælder, at $N \geq N_0 = 10^6$.
Sæt $M = max(N, 10^6)$. Altså er $M \geq N$ og $M \geq 10^6$.
Ergo: $n \geq M \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$.

Hernæst bevises "kun hvis" ($\Downarrow$).
For at bevise dette sættes $M = N$ og der fås: $n \geq N \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$.
Så på N's plads indsættes 10^6.
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \geq 10^6 \; \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a - a_n| < \varepsilon$.

$\blacksquare$