Analyse 1: Opgave 3 (fra noter om potensrækker)

G4-111

28. september 2015

Opgave 3 *Betragt følgende forbedrede udgave af rodkriteriet, som benytter* lim sup *i stedet for* lim *(se opgave 112 og 126 i Funktioner af en og flere variable for definition og egenskaber af* lim sup*.)*

Sætning 9 (Rodkriteriet II). *Lad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *være en kompleks række og lad* $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Så gælder følgende.*

1. Hvis $\alpha < 1$, så konvergerer rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

2. Hvis $\alpha > 1$, så divergerer rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

3. Hvis $\alpha = 1$ og $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ for uendeligt mange n, så divergerer rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

4. Hvis $\alpha = 1$ og $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$ fra et vist trin $n \geq N$, så kan rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ enten divergere, konvergere absolut eller blot konvergere betinget.

(a) Bevis 1 i Sætning 9

Antag at $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha < 1$. Jævnfør opgave 112 er $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} b_n$, hvor $b_n = sup\{\sqrt[n]{|a_n|} : m \geq n\}$ og følgen $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ er aftagende. Dermed er

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \inf\{b_n\}$$

Vælg nu b, således at $\alpha < b < 1$. Da findes der et $b_N < b$, for ellers ville b være en større nedre grænse. Da $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ er aftagende, gælder det at $\forall n \geq N : b_n \leq b_N < b$. Fordi b_n er en mindste øvre grænse, gælder det hermed at

$$\forall n \geq N : \sqrt[n]{|a_n|} \leq b_n < b \Rightarrow |a_n| < b^n$$

Jævnfør sætningen for kvotientrækker (sætning 4.31) er rækken $\sum_{n=N}^{\infty} b^n$ konvergent da $|b| < 1$. Det følger derfor af sammenligningskriteriet (sætning 4.34), at rækken $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ er konvergent, hvorfor det følger af halelemmaet (lemma 4.35), at rækken $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ er konvergent. Hermed er det bevist, at rækken $\sum_{n=N}^{\infty}a_n$ er absolut konvergent.

■

(b) Bevis 2 i Sætning 9

Antag $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\alpha>1$. Så gælder det at

$$\forall n\in\mathbb{N}:\inf\{b_n\}=\alpha>1\Rightarrow b_n>1$$

Formålet er nu at konstruere en delfølge $\{a_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ af $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n=0}^{\infty}$ således at $a_{n_k}>1$ for alle $k\in\mathbb{N}$. Vælg a_{n_0} som det første element i $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n=0}^{\infty}$ hvor $\sqrt[n]{|a_n|}>1$. Et sådant element må nødvendigvis findes da $b_1>1$, for ellers ville der være en mindre øvre grænse $b\leq 1$, hvilket ville være en modstrid. Dernæst vælges et $n_k>n_1$ således at $a_{n_k}>1$. Et sådant element må nødvendigvis findes da $b_{n_k}>1$. Således fortsætter konstruktionen af delfølgen iterativt, ved at der findes et $n_{k+1}>n_k$, sådan at $a_{n_{k+1}}>1$. Derved opnås en strengt voksende følge af naturlige tal $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ sådan at $a_{n_k}>1$ for alle $k\in\mathbb{N}$. Så vides det at $\sqrt[n]{|a_n|}>1$ for uendeligt mange n, hvorved det for uendeligt mange n gælder at

$$\sqrt[n]{|a_n|}>1\Leftrightarrow|a_n|>1$$

Derved er $\lim_{n\to\infty}|a_n|\neq 0$, hvorved lemma 4.8 giver at $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$, hvilket betyder, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ er divergent jævnfør sætning 4.32.

■

(c) Bevis 3 i Sætning 9

Antag at $\alpha=1$ og $\sqrt[n]{|a_n|}>1$ for uendeligt mange n. Da det for uendeligt mange n gælder at

$$\sqrt[n]{|a_n|}>1\Leftrightarrow|a_n|>1$$

divergerer rækken $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ jævnfør argumentet i opgave (b) ovenfor.

■

(d) Find en absolut konvergent række $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ med $\alpha=1$ og $\sqrt[n]{|a_n|}\leq 1$ fra et vist trin.

Betragt rækken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Denne række er konvergent jævnfør sætning 4.38, hvorved den også er absolut konvergent, da alle led er positive. $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{n^{\frac{2}{n}}}\leq 1$ og $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=1$. Jævnfør opgave 126 gælder det da at $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=1=\alpha$. Dermed er alle betingelser opfyldt.

(e) Find en række $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ med $\alpha=1$ og $\sqrt[n]{|a_n|}\leq 1$ fra et vist trin, som divergerer.

Betragt rækken $\sum_{n=0}^{\infty} 1$. Denne række er divergent, da ledene ikke går mod 0. Det gælder at $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1|} = 1 = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1|}$. Da $\sqrt[n]{|1|} \leq 1$ er alle betingelser dermed opfyldt.

(f) Find en række $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ med $\alpha = 1$ og $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$ fra et vist trin, som konvergerer betinget, men som ikke konvergerer absolut.

Betragt rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Da er

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|} = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \leq 1 \text{ og } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|} = 1 = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|}$$

Da rækken desuden er betinget konvergent er alle betingelser opfyldt.