Opgave 5

I denne opgave skal følgende nyttige lemma vises.

Lemma 10

Lad $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ være en reel følge, som opfylder, at $b_n > 0$ fra et vist trin. Så er

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \liminf_{n\to\infty} b_n^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} b_n^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Se opgave 112 og 126 i *Funktioner af en og flere variable* for definition og egenskaber af lim inf og lim sup.

(a) Gør rede for, hvorfor det er nødvendigt at antage, at $b_n \neq 0$ fra et vist trin.

(b) Lad $a, b \in \mathbb{R}$. Vis, at hvis $\forall r \in \mathbb{R} : r < a \Rightarrow r < b$, så er $a \leq b$

(c) Brug (b) til at vise Lemma 10.

Besvarelse

(a) Eftersom division med nul ikke er tilladt skal $b_n \neq 0$.

(b) Beviset føres kontrapositivt.
Først kontraponeres udtrykket:

$$\neg(a \leq b) \Rightarrow \neg(\forall r \in \mathbb{R} : r < a \Rightarrow r < b) \tag{1}$$

$$a > b \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R} : (r < a) \wedge (r \geq b) \tag{2}$$

Da alle tal er reelle og $a \neq b$, kan der altid bestemmes et tal $r \in \mathbb{R}$ i intervallet $[b, a[$ så $a > r \geq b$. Da gælder (2).

(c) Ud fra opgave 126 (c) vides det, at:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Derfor er det kun det første og sidste ulighedstegn fra Lemma 10, som skal vises. Vi vil vise, at:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \liminf_{n\to\infty} b_n^{\frac{1}{n}} \tag{3}$$

Vi betegner $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = a$. Vi ved, at a er ikke-negativ, idet $b_n > 0$, så dermed må grænseværdien være ikke-negativ. Dermed eksisterer et tal $r \in \mathbb{R}$ så $r < a$. Lad nu $r < a$. Vi ved fra opgave 112, at

$$a = \liminf_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \sup_{n\to\infty} c_n \tag{4}$$

hvor

$$c_n = \inf_{n\to\infty} \{\frac{b_{m+1}}{b_n} : m \geq n\}$$

Lighedstegnet i (4) gælder, da vi fra opgave 112 ved, at c_n er voksende. Derfor gælder det om c_n at den går mod den mindste øvre grænse, som er lig $\sup c_n$.
Da vi har valgt r til at være mindre end a og c_n betegner største nedre grænse, gælder det, at:

$$\exists N \in \mathbb{N} : c_N > r \Rightarrow \forall n \geq N : \ c_n \geq c_N > r$$

Implikationspilen fås fra definition 3.12 om supremum.
Da vi ved, at c_n er mindre a, så må der gælde, at:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \geq c_n > r \ \Rightarrow \ \forall n \geq N : \ \frac{b_{n+1}}{b_n} > r$$

Anvend $\frac{b_{n+1}}{b_n} > r$ på talfølgen $N, N+1, N+2, ..., n-1$. Der er $n-N$ led:

$$\frac{b_{N+1}}{b_N} \cdot \frac{b_{N+2}}{b_{N+1}} \cdot \frac{b_{N+3}}{b_{N+2}} \cdot ... \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}} > r^{n-N} \ \Leftrightarrow \ \frac{b_n}{b_N} > r^{n-N} \ \Rightarrow \ b_n > r^n \cdot \frac{b_N}{r^N}$$

Nu tages den n'te rod på begge sider af ulighedstegnet, så fås:

$$b_n^{1/n} > \left(r^n \cdot \frac{b_N}{r^N}\right)^{1/n} = r\left(\frac{b_N}{r^N}\right)^{1/n} \ \rightarrow \ r \text{ for } n \to \infty \ \Rightarrow \ r < \liminf b_n^{\frac{1}{n}}$$

Vi ved, at $\left(\frac{b_N}{r_N}\right)^{1/n} \to 1$ for $n \to \infty$, da sætning 4.4 siger, at $\frac{1}{n} \to 0$ for $n \to \infty$. Dermed får vi, at $\left(\frac{b_N}{r_N}\right)^{0} = 1$, altså går $r \cdot 1 \to r$.

Fra opgave (b) har vi, at $r < a \Rightarrow r < b$ medfører at $a \leq b$ så $\liminf \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \liminf b_n^{\frac{1}{n}}$.
Beviset for sidste ulighed udføres på samme måde.