# Analyse 1 - Aflevering 4

Gruppe G4-104, 103 og 107
Department of Mathematics, Aalborg University, Denmark
Teacher: Morten Grud Rasmussen
2 pages

October 8, 2015

## Opgave 6

**Sætning 9**: (Rodkriteriet II). Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en kompleks række, og lad $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Så gælder følgende:

1. Hvis $\alpha < 1$, så konvergerer rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.
2. Hvis $\alpha > 1$, så divergerer rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
3. Hvis $\alpha = 1$ og $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ for uendeligt mange $n$, så divergerer rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
4. Hvis $\alpha = 1$ og $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$ fra et vist trin $n \geq N$, så kan rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ enten divergere, konvergere absolut eller blot konvergere betinget.

**Lemma 10**: Lad $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ være en reel følge, som opfylder, at $b_n > 0$ fra et vist trin. Så er

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \liminf_{n\to\infty} b_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} b_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \tag{1}$$

**Sætning 11**: (kvotientkriteriet II). Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en række, som opfylder, at $a_n \neq 0$ fra et vist trin $n \geq N$. Så gælder følgende:

1. Hvis $R = \lim\ \sup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, så konvergerer rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.
2. Hvis $r = \lim\ \inf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, så divergerer rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
3. Hvis $r = \lim\ \inf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$ men $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$ for alle $n$ fra et vist trin $n \geq N'$, så divergerer rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(a) Bevis 1 og 2 i Sætning 11 vha. Lemma 10 og Sætning 9.

I beviset for 1 og 2 er det nødvendigt at bruge Lemma 10 som kræver at $0 < b_n$ fra et hvist $n$.
Der gælder at fra et vist $n$ er $a_n \neq 0$, og da $0 \leq |a_n|$ på grund af numerisk værdien gælder der at $0 < |a_n|$ fra et vist $n$. Dermed må $|a_n|$ gerne benyttes som $b_n$ i lemma 10. Nu bevises 1. i sætning 11.
Da $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ medfører Lemma 10, at $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < 1$, hvis $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} = \{|a_n|\}_{n=0}^{\infty}$.
Dermed følger det af sætning 9, at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent.

■

Nu bevises 2 i sætning 11.
Da $1 < \liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ medfører Lemma 10, at $1 < \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ hvis $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} = \{|a_n|\}_{n=0}^{\infty}$.
Dermed følger det af sætning 9, at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er divergent.

■

(b) Bevis 3 i sætning 11.
Det gælder desuden, at $1 \leq \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \Leftrightarrow |a_n| \leq |a_{n+1}|$ for alle $n$ hvor $n \geq N'$.
Dette medfører at $|a_m| \leq |a_n|$ for alle $m$ hvor $N' \leq m \leq n$. Det gælder desuden ifølge antagelserne, at $0 < |a_m|$ hvis $m \geq N$. Hvis disse to udtryk kombineres, fås det, at $0 < |a_M| \leq |a_n|$ hvor $M = max(N, N')$.
Dette betyder at $a_n$ ikke kan gå mod nul, hvilket ifølge Sætning 4.32 betyder at $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n$ er divergent.

■