Potensrækker Opgave 7

a) Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ være en reel eller kompleks potensrække og sæt $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Hvis $\alpha = \infty$, så er rækkens konvergensradius $R = 0$, ellers er R givet ved $\frac{1}{R} = \alpha$, hvor $0 < R \leq \infty$.

Bevis: Beviset deles op i tilfældet hvor $R \in \mathbb{R}$ og tilfældet hvor $R = \infty$ først ses på $R \in \mathbb{R}$.
Lad $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ være en kompleks række og sæt $\beta = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}$, så siger sætning 9 at hvis $\beta < 1$ så konvergerer rækken absolut.
sæt $b_n = a_n(z-a)^n$

$$\beta = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-a)^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||z-a|^n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|z-a| < 1 \tag{1}$$

$\Updownarrow$

$$|z-a| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\alpha} = R \tag{2}$$

Dermed konvergerer potensrækken hvis $|z-a| < R$, tilsvarende siger sætning 9, at hvis $\beta > 1$ dvs. $|z-a| > R$ så divergerer rækken, hvilket er definitionen på en konvergensradius R.
I tilfældet hvor $\alpha = \infty$ skal vises at $R = 0$. Da $\sqrt[n]{|a_n(z-a)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|z-a|$ og $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha = \infty$ så er $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-a)|} = \infty$ for $z \neq a$ og derfor divergerer rækken i alle andre tilfælde end $z = a$ og derfor er konvergensradius $R = 0$.
Der ses nu på tilfældet hvor $R = \infty$ da er $\alpha = 0$ hvilket vil sige at $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|z-a| = 0$ uanset hvad $|z-a|$ er og potensrækken vil dermed altid konvergere.

b) Find en øvre grænse for konvergensradius vha. $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. I følge Lemma 10 gælder det at:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \tag{3}$$

$\Updownarrow$

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \leq \frac{1}{\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \bar{R}, \tag{4}$$

hvor $\bar{R}$ er en øvre grænse for R.

c) Find en nedre grænse for potensrækken vha. $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Vi bruger samme fremgangsmåde som i b) I følge lemma 10 gælder det at:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \tag{5}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{R} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} \leq \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R, \tag{6}$$

hvor $\underline{R}$ er en nedre grænse for R.

d) Er man normalt mest interesseret i en øvre eller nedre grænse?

Det kommer an på hvad man vil vide, men den nedre grænse har den fordel at man ved at alt inden for den konvergerer.

e) Konstruér et eksempel på en potensrække, hvor den nedre grænse $\underline{R}$ er forskellig fra den rigtige konvergensradius R. vi vælger

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{hvis } n \text{ er lige} \\ 3 & \text{hvis } n \text{ er ulige} \end{cases} \tag{7}$$

Så bliver $\left\{ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \cdots \right\}$, hvilket fortsætter ud i det uendelige, så

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3}{2}. \tag{8}$$

så $\underline{R} = \frac{2}{3}$

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}} = 3^0 = 1 \tag{9}$$

så $R = 1$, dermed er $\underline{R} < R$