# Potensrækker

*Morten Grud Rasmussen*[1]
*10. november 2015*

## Definition og konvergens af potensrækker

**Definition 1** (Potensrække)**.** En *potensrække* er en uendelig række på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \tag{1}$$

hvor afsnittene er polynomier i den komplekse variable $z$, altså hvor $a$ og $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ er givne komplekse tal, og $z \in \mathbb{C}$ er en kompleks variabel.

En potensrække kan opfattes som et polynomium af uendelig orden; den $N$'te afsnitssum

$$\sum_{n=0}^{N} a_n(z-a)^n$$

af (1) er jo et polynomium af orden $N$. Den mest fundamentale potensrække er *den geometriske række*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n. \tag{2}$$

Den geometriske række er som bekendt[2] konvergent for $|z| < 1$ og divergent for $|z| \geqslant 1$ (se også Opgave 8). Mængden $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ af $z$'er, hvor (2) er konvergent, er altså en cirkelskive uden rand med radius 1 i den komplekse plan. Det skal vise sig, at mængder af denne type spiller en helt central rolle i teorien om potensrækker, og vi giver dem derfor et navn:

**Definition 2** (Åben/lukket cirkelskive)**.** Lad $a \in \mathbb{C}$ og $0 \leqslant R \leqslant \infty$. Da kaldes mængden

$$B_R(a) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |a-z| < R \right\}$$

for *den åbne cirkelskive med centrum i $a$ og radius $R$.* Tilsvarende kaldes mængden

$$\overline{B_R}(a) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |a-z| \leqslant R \right\}$$

for *den lukkede cirkelskive med centrum i $a$ og radius $R$.*

[1] Disse noter er en bearbejdning af et uddrag af 3. version af noterne *Supplement til Matematik 1GB* fra 2002 af Jan Philip Solovej, skrevet til brug på kurset Matematik 1 Grundkursus B ved Københavns Universitet som et supplement til bogen *Funktioner af en og flere variable* af Ebbe Thue Poulsen. De relevante dele af disse noter er i sig selv en bearbejdning af et uddrag fra *Indledning til Matematisk Analyse II* af Henrik Stetkær, Klaus Thomsen og Christina Tønnesen-Friedman, der ved Aarhus Universitet brugtes som supplement til *Funktioner af en og flere variable*. Tak til Jan Philip Solovej for tilladelse til at bruge materialet. Ansvaret for materialet i disse noter ligger dog udelukkende hos undertegnede.

[2] Sætning 4.31 i *Funktioner af en og flere variable*

Det kan diskuteres hvor meget cirkelskive, der er over $\overline{B_\infty}(a) = B_\infty(a) = \mathbb{C}$, $B_0(a) = \varnothing$ og $\overline{B_0}(a) = \{a\}$, men I vil senere se, at betegnelserne *åben* og *lukket* er velvalgte, også for disse tre mængder. I første omgang nøjes vi med at konstatere, at hvis vi erstatter $\mathbb{C}$ med $\mathbb{R}$ alle steder i ovenstående definition, så får vi netop alle de åbne hhv. lukkede intervaller – samt den tomme mængde $\varnothing$ og singleton-mængderne $\{a\}$, som i *Funktioner af en og flere variable* ikke betragtes som intervaller, jf. bemærkningen efter Definition 3.25. De åbne cirkelskiver kan altså betragtes som en kompleks udgave af de åbne intervaller.

Med denne sprogbrug kan vi nu sige, at den geometriske række er konvergent på den åbne cirkelskive med centrum i 0 og radius 1 og divergent i ethvert punkt udenfor denne åbne cirkelskive. Ved at bruge dette kan vi også bestemme konvergensforholdene for rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n, \tag{3}$$

som fremkommer fra den geometriske række ved at erstatte $z$ med $z-a$. Det er nemlig klart, at (3) konvergerer i punktet $z = z_0$ hvis og kun hvis (2) konvergerer i punktet $z = z_0 - a$. Altså er (3) konvergent for alle $z$ i den åbne cirkelskive med centrum i $a$ og radius 1 og divergent for alle $z$ udenfor denne åbne cirkelskive.

Vi skal nu vise, at konvergensforholdene for en generel potensrække (1) i det store hele er som for rækken (3). Blot bliver radius i den cirkelskive, hvor rækken konvergerer, ikke nødvendigvis 1, men kan være hvad som helst mellem 0 og $\infty$ (begge inklusive). Bemærk at forskellen mellem rækkerne (1) og (3) består i, at der i (1) optræder koefficienterne $a_0, a_1, a_2$ osv. I (3) er alle disse koefficienter lig 1. Hvis for eksempel $|a_n| = n!$ eller $|a_n| = n^n$, således at absolutværdien af $a_n$'erne vokser usympatisk hurtigt, vil det generelle led i rækken (1) (altså $a_n(z-a)^n$) ikke gå mod nul, når $n$ går mod uendelig, med mindre $z = a$. I sådanne tilfælde konvergerer rækken (1) kun for en enkelt værdi af $z$ nemlig $z = a$.

**Eksempel 3.** Lad os se på følgende eksempel:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(in)^n(z-2)^n.$$

Denne potensrække konvergerer åbenlyst for $z = 2$, men hvad med andre $z$-værdier? Bemærk at

$$\begin{aligned}|(in)^n(z-2)^n| &= |i^n n^n (z-2)^n| = |i^n||n^n||(z-2)^n| \\ &= |i|^n n^n |z-2|^n = n^n|z-2|^n = (n|z-2|)^n\end{aligned}$$

for alle $n \in \mathbb{N}$. Hvis $z \neq 2$ er $|z-2| > 0$, og når $n > 1/|z-2|$, er $n|z-a| > 1$. Så

$$|(in)^n(z-2)^n| = (n|z-2|)^n > 1$$

for alle $n > 1/|z-2|$. Derfor er $\sum_{n=0}^{\infty}(in)^n(z-2)^n$ divergent for $z \neq 2$, thi rækkens led ikke går mod 0.[3]

**Eksempel 4.** Betragt potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n \tag{4}$$

[3]Sætning 4.32 i *Funktioner af en og flere variable*

der fremkommer fra (1) ved at sætte $a = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{8}$, og så videre. Denne potensrække konvergerer, når $|z| < 2$, og divergerer når $|z| \geqslant 2$. For at overbevise læseren om dette, er det nok at omskrive (4) en lille smule:

$$2^{-n}z^n = \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

for alle $n \in \mathbb{N}$, så

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n.$$

Men det er jo den geometriske række svarende til variabel-værdien $z/2$. Så vi ser, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty}(z/2)^n$ og dermed også rækken (4) konvergerer, når $|\frac{z}{2}| < 1$ og divergerer, når $|\frac{z}{2}| \geqslant 1$. Ved at gange igennem med 2 ser vi altså, at (4) er konvergent for $|z| < 2$ og divergent for $|z| \geqslant 2$ som påstået.

Som disse eksempler antyder, afhænger konvergensforholdene for en potensrække (1) af, hvor hurtigt absolut-værdierne $|a_n|$ af $a_n$ vokser, når $n$ går mod uendelig. Vi skal nu se, at mængden af $z$, for hvilke en given potensrække konvergerer ikke kan være helt tilfældig.

**Sætning 5** (Konvergensradius). *Givet en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ findes der $0 \leqslant R \leqslant \infty$ så rækken konvergerer absolut for $|z-a| < R$ og rækken divergerer for $|z-a| > R$. Med andre ord findes der altså en radius $R$, så ledes at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ konvergerer for alle $z \in B_R(a)$, den åbne cirkelskive med centrum $a$ og radius $R$, mens den divergerer for alle $z \notin \overline{B_R}(a)$, den lukkede cirkelskive med centrum $a$ og radius $R$.*

Man kalder $R$ for *konvergensradius* for potensrækken. Bemærk, at sætningen intet siger om, hvad der sker, når $|z| = R$.

*Bevis for Sætning 5.* Vi betragter mængden af $t \geqslant 0$, for hvilke talfølgen $\{|a_n|t^n\}_{n=0}^{\infty}$ er begrænset. Altså mængden

$$\mathcal{A} = \left\{t \geqslant 0 \,\middle|\, \text{Talfølgen } \{|a_n|t^n\}_{n=0}^{\infty} \text{ er begrænset}\right\}$$

eller udtrykt ved kvantorer

$$\mathcal{A} = \{t \geqslant 0 \mid \exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N}\colon |a_n|t^n \leqslant M\}.$$

Denne mængde er ikke tom, da den indeholder $t = 0$. Hvis mængden $\mathcal{A}$ ikke er opadtil begrænset, altså hvis talfølgen $\{|a_n|t^n\}_{n=0}^{\infty}$ er begrænset for vilkårligt store $t$, sætter vi $R = \infty$. I modsat fald sætter vi $R = \sup\mathcal{A}$.

Lad nu $z$ være valgt, så $|z-a| < R$. Så findes der et $t \in \mathcal{A}$ så $R > t > |z-a|$. Da $t \in \mathcal{A}$, findes $0 \leqslant M < \infty$, så $|a_n|t^n \leqslant M$ for alle $n$.

Hvis vi skriver $|a_n||z-a|^n = |a_n|t^n\left(\frac{|z-a|}{t}\right)^n$, ser vi, at

$$|a_n||z-a|^n \leqslant M\left(\frac{|z-a|}{t}\right)^n.$$

Konvergens af potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ følger nu af sammenligningskriteriet, for da $\frac{|z-a|}{t} < 1$, er den geometriske række $\sum_n^{\infty} M(\frac{|z-a|}{t})^n$ konvergent.

Hvis $|z-a| > R$ er $\{|a_n||z-a|^n\}_{n=0}^{\infty}$ en ubegrænset følge. Vi kan derfor ikke have

$$\lim_{n\to\infty}|a_n||z-a|^n = 0.$$

Da leddene i potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ altså ikke går mod 0, kan den ikke være konvergent.[4] □

[4] Se Sætning 4.32 i *Funktioner af en og flere variable*

Vi bemærkede som sagt, at Sætning 5 intet siger om konvergensen af potensrækken for $z \in \mathbb{C}$ med $|z-a| = R$. Det er ofte en kompliceret affære at afgøre, hvorvidt en given potensrække konvergerer i et punkt påkonvergenscirklen. Det kan sagtens forekomme, at rækken konvergerer i ét punkt på denne cirkel, men ikke i et andet.

Når man skal finde konvergensradius af en potensrække, kan man benytte et af konvergenskriterierne for uendelige rækker. Det mest almindelige er at benytte enten kvotientkriteriet eller rodkriteriet. Vi formulerer deres konsekvenser for potensrækker som en separat sætning.

**Sætning 6** (Kvotient- og rodkriterium for konvergensradius)**.** *Lad talfølgen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ opfylde, at der findes et $N \in \mathbb{N}$, så $a_n \neq 0$ for $n \geqslant N$. Hvis grænseværdien*

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

*eksisterer (eventuelt med $R = \infty$), da er $R$ konvergensradius for enhver potensrække på formen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$. Ligeledes, hvis grænseværdien*

$$R = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{-\frac{1}{n}}$$

*eksisterer (eventuelt med $R = \infty$), da er $R$ konvergensradius for enhver potensrække på formen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$.*

*Bevis.* Når $z \neq a$ giver antagelserne, at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(z-a)^{n+1}|}{|a_n(z-a)^n|} = \frac{|z-a|}{R}.$$

Det følger fra kvotientkriteriet for rækker, at

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-a)^n|$$

konvergerer, når

$$\frac{|z-a|}{R} < 1,$$

dvs. når $|z-a| < R$, og divergerer når

$$\frac{|z-a|}{R} > 1,$$

dvs. når $|z-a| > R$. Altså må $R$ være konvergensradius for rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

jvf. Sætning 5. Rodkriteriet er helt analogt. □

**Eksempel 7.** Vi søger konvergensradius for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+7)(z-3)^n \ . \tag{5}$$

Benytter vi kvotientkriteriet for potensrækker (Sætning 6), skal vi betragte

$$\frac{2n+7}{2(n+1)+7} = \frac{2n+7}{2n+9}$$

som konvergerer mod 1 for $n \to \infty$. Men så er konvergensradius for (5) 1, ifølge Sætning 6.

**Eksempel 8.** Vi søger konvergensradius for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3(z-3)^n \ . \tag{6}$$

Atter sætter vi først vores lid til Sætning 6, og søger at finde grænseværdien for kvotienterne

$$\frac{n^3}{(n+1)^3}.$$

Efter omskrivningen

$$\frac{n^3}{(n+1)^3} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^3}$$

ser man umiddelbart, at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} \ = \ 1.$$

Så 1 er altså konvergensradius for (6).

# Opgaver

**Opgave 1.** Find konvergensradius for følgende potensrækker:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n(z-2)^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}z^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2(z-i)^n$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(z+2)^n}{n(n+1)}$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(z-4)^n}{n!}$

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n+3)^n(z-2i)^n$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \log(\frac{n+1}{n})z^n$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(n+1)!}z^{2n}$

**Opgave 2.** Lad $a \in \mathbb{C}$ være et vilkårligt komplekst tal og $r$ et vilkårligt element i $[0,\infty]$. Vis ved eksempel, at der findes en potensrække, der er konvergent på $\{z \in \mathbb{C} \mid |a-z| < r\}$ og divergent på $\{z \in \mathbb{C} \mid |a-z| > r\}$.

**Opgave 3.** Betragt følgende forbedrede udgave af rodkriteriet, som benytter lim sup i stedet for lim (se Opgave 112 og 126 i *Funktioner af en og flere variable* for definition og egenskaber af lim sup).

**Sætning 9** (Rodkriteret II)**.** *Lad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *være en kompleks række og lad* $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Så gælder følgende.*

1. *Hvis* $\alpha < 1$, *så konvergerer rækken* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut.*

2. *Hvis* $\alpha > 1$, *så divergerer rækken* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

3. *Hvis* $\alpha = 1$ *og* $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ *for uendeligt mange* $n$, *så divergerer rækken* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

4. *Hvis* $\alpha = 1$ *og* $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant 1$ *fra et vist trin* $n \geqslant N$, *så kan rækken* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *enten divergere, konvergere absolut eller blot konvergere betinget.*

(a) Bevis 1 i Sætning 9.

(b) Bevis 2 i Sætning 9.

(c) Bevis 3 i Sætning 9.

(d) Find en absolut konvergent række $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ med $\alpha = 1$ og $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant 1$ fra et vist trin.

(e) Find en række $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ med $\alpha = 1$ og $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant 1$ fra et vist trin, som divergerer.

(f) Find en divergent række $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ med $\alpha = 1$ og $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant 1$ fra et vist trin, som konvergerer betinget, men som ikke konvergerer absolut.

**Opgave 4.** Find et funktionsudtryk for summen af følgende potensrækker

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{3n}$

**Opgave 5.** I denne opgave skal følgende nyttige lemma vises.

**Lemma 10.** *Lad* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *være en reel følge, som opfylder, at* $b_n > 0$ *fra et vist trin. Så er*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} b_n^{1/n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} b_n^{1/n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}. \tag{7}$$

Se Opgave 112 og 126 i *Funktioner af en og flere variable* for definition og egenskaber af lim inf og lim sup.

(a) Gør rede for, hvorfor det er nødvendigt at antage, at $b_n \neq 0$ fra et vist trin.

(b) Lad $a, b \in \mathbb{R}$. Vis, at hvis $\forall r \in \mathbb{R} \colon r < a \Rightarrow r < b$, så er $a \leqslant b$.

(c) Brug (b) til at vise Lemma 10.
*Vink: Husk, at* $(b_N r^n)^{\frac{1}{n+N}} = r(\frac{b_N}{r^N})^{\frac{1}{n+N}} \to r$ *for* $n \to \infty$.

**Opgave 6.** Betragt følgende forbedrede udgave af kvotientkriteriet, som benytter lim inf og lim sup i stedet for lim (se Opgave 112 og 126 i *Funktioner af en og flere variable* for definition og egenskaber af lim inf og lim sup).

**Sætning 11** (Kvotientkriteret II)**.** *Lad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *være en række, som opfylder, at* $a_n \neq 0$ *fra et vist trin* $n \geqslant N$*. Så gælder følgende.*

1. *Hvis* $R = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$*, så konvergerer rækken* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut.*

2. *Hvis* $r = \liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$*, så divergerer rækken* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$*.*

3. *Hvis* $r = \liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$ *men* $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geqslant 1$ *for alle* $n$ *fra et vist trin* $n \geqslant N'$*, så divergerer rækken* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$*.*

(a) Bevis 1 og 2 i Sætning 11 vha. Lemma 10 og Sætning 9.

(b) Bevis 3 i Sætning 11.

**Opgave 7.** I denne opgave relateres Sætning 9 og Sætning 11 til konvergensradius for en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$.

(a) Bevis følgende sætning vha. Sætning 9.

**Sætning 12** (Konvergensradius II)**.** *Lad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *være en reel eller kompleks potensrække og sæt* $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$*. Hvis* $\alpha = \infty$*, så er rækkens konvergensradius* $R = 0$*, ellers er rækkens konvergensradius* $R$ *givet ved* $\frac{1}{R} = \alpha$*, hvor* $0 < R \leqslant \infty$*.*

(b) Find en øvre grænse for konvergensradius for en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ ved hjælp af $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.
*Vink: Benyt (7) fra Lemma 10.*

(c) Find en nedre grænse for konvergensradius for en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ ved hjælp af $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

(d) Er man normalt mest interesseret i en øvre eller en nedre grænse for konvergensradius – m.a.o. hvilken af de to ovenstående resultater er oftest mest brugbar?

(e) Konstruér et eksempel på en potensrække, hvor den nedre grænse for konvergensradius fra (c) er forskellig fra den rigtige konvergensradius.

**Opgave 8.** I denne opgave skal du også undersøge randen af konvergensområdet.

(a) Gør rede for, at mængden af $z$, hvor den geometriske række

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

konvergerer, er $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

(b) Gør rede for, at mængden af $z$, hvor potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

konvergerer, er $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$.

**Opgave 9.** I denne opgave sammenlignes de forskellige konvergenskriterier for rækker.

(a) Konstruér en række, som ifølge Sætning 11 konvergerer, men som ikke opfylder betingelserne i Kvotient- eller Rodkriteriet i *Funktioner af en og flere variable.*

(b) Konstruér en række, som ifølge Sætning 11 divergerer, men som ikke opfylder betingelserne i Kvotient- eller Rodkriteriet i *Funktioner af en og flere variable.*

(c) Konstruér en række, som ifølge Sætning 9 konvergerer, men som ikke opfylder betingelserne i Sætning 11.

(d) Konstruér en række, som ifølge Sætning 9 divergerer, men som ikke opfylder betingelserne i Sætning 11.

(e) Eksisterer der en række, som konvergerer ifølge Sætning 11, men som ikke opfylder betinglserne i Sætning 9?
*Vink: Betragt* (7) *i Lemma 10.*

**Opgave 10.** Lad potensrækkerne $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ have konvergensradius $R_a$ og $R_b$, hhv.

(a) Gør rede for at konvergensradius for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-a)^n$ mindst er $\min\{R_a,R_b\}$.

(b) Gør rede for at konvergensradius for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)(z-a)^n$ mindst er $\min\{R_a,R_b\}$.

Lad $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ være en kompleks talfølge med modulus 1.

(c) Vis, at konvergensradius for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} z_n a_n(z-a)^n$ er $R_a$, og at potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+z_n b_n)(z-a)^n$ har en konvergensradius, der er mindst $\min\{R_a,R_b\}$.

**Opgave 11.** Bevis følgende identiteter:

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}, \quad z \in \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}.$$

(b) $$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n, \quad x \in \, ]-1,1[.$$

(c) $$\frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}, \quad z \in \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}.$$

(d) $$\frac{z^2}{1-z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{3n+2}, \quad z \in \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}.$$