Matematisk modellering og numeriske metoder

Eksempelsamling

Morten Grud Rasmussen

18. december 2015

Indhold

1 Analytiske metoder

1.1 Metoder til ODE'er af første orden

1.1.1 Separation af de variable

Eksempel 1.1.1.1. Betragt ODE'en

$$2y'(x) = \frac{y(x)(x+1)}{x}.$$

Først bemærker vi, at $y \equiv 0$ er en løsning. For at finde andre løsninger, skal vi omskrive til separeret form:

$$\frac{2y'(x)}{y(x)} = \frac{2}{y(x)}y'(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x},$$

som tydeligvis er på formen $g(y(x))y'(x) = f(x)$, hvor $g(y) = \frac{2}{y}$ og $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Vi finder nu stamfunktioner $G = \int g(y)\,\mathrm{d}y$ og $F = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ til g og f, hhv. (det er nok at finde én til hver; integrationskonstanten tilføjer vi til sidst):

$$G(y) = 2\ln(|y|) \quad \text{og} \quad F(x) = x + \ln(|x|).$$

Så separation af de variable giver altså:

$$2\ln(|y(x)|) = x + \ln(|x|) + k.$$

Da $y \equiv 0$ er en løsning, ved vi fra entydighed af løsninger, at ingen andre løsninger y kan krydse 0. Tilsvarende optræder x alene i nævneren, så x kan altså heller ikke krydse 0. Vi kan derfor splitte op i de fire tilfælde $y > 0$ og $x > 0$, $y > 0$ og $x < 0$, $y < 0$ og $x > 0$, samt $y < 0$ og $x < 0$. Vi nøjes med at betragte det første tilfælde og kan nu isolere $y(x)$:

$$e^{2\ln(y(x))} = \left(e^{\ln(y(x))}\right)^2 = (y(x))^2 = e^{x+\ln(x)+k} = e^x e^{\ln(x)} e^k = e^x x e^k,$$

eller

$$y(x) = a\sqrt{x}e^{\frac{x}{2}},$$

hvor $a = \sqrt{e^k} > 0$ er en positiv konstant. For at tjekke, om vi har regnet rigtigt, gør vi nu prøve:

$$2y'(x) = \frac{ae^{\frac{x}{2}}(x+1)}{\sqrt{x}} \quad \text{og} \quad \frac{y(x)(x+1)}{x} = \frac{a\sqrt{x}(x+1)e^{\frac{x}{2}}}{x},$$

og vores løsning er altså korrekt.

Eksempel 1.1.1.2. Betragt følgende ODE:

$$y'(x) + 2\sin(2\pi x) = 0,$$

som kan omskrives til

$$y'(x) = -2\sin(2\pi x),$$

som er på separeret form med $g(y) = 1$ og $f(x) = -2\sin(2\pi x)$. Vi finder stamfunktioner $G = \int g(y)\,\mathrm{d}y$ og $F = \int F(x)\,\mathrm{d}x$:

$$G(y) = y \quad \text{og} \quad F(x) = \frac{1}{\pi}\cos(2\pi x).$$

Separation af de variable giver altså:

$$y(x) = \frac{1}{\pi}\cos(2\pi x) + k,$$

hvor k er en vilkårlig integrationskonstant. For en sikkerheds skyld tjekker vi vores resultat:

$$y'(x) = -\frac{2\pi}{\pi}\sin(2\pi x) + 0,$$

som altså opfylder differentialligningen.

Eksempel 1.1.1.3. Betragt følgende ODE:

$$y'(x) = y(x),$$

som for $y \neq 0$ kan omskrives til

$$\frac{1}{y(x)}y'(x) = 1,$$

som er på separeret form med $g(y) = \frac{1}{y}$ og $f(x) = 1$. Vi finder stamfunktioner $G = \int g(y)\,\mathrm{d}y$ og $F = \int f(x)\,\mathrm{d}x$:

$$G(y) = \ln(|y|) \quad \text{og} \quad F(x) = x.$$

Separation af de variable giver altså:

$$\ln(|y(x)|) = x + k,$$

hvor k er en vilkårlig integrationskonstant. Vi isolerer y i ovenstående:

$$|y(x)| = e^{\ln(|y(x)|)} = e^{x+k} = e^k e^x \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \pm e^k e^x = ce^x,$$

hvor $c = \pm e^k$. Idet vi bemærker, at $y \equiv 0$ også er en løsning, og er $y(x) = ce^x$ altså en løsning for alle reelle tal c. For at tjekke, om vi har regnet rigtigt, sætter vi ind i differentialligningen:

$$y'(x) = ce^x = y(x),$$

så y opfylder altså differentialligningen.

Eksempel 1.1.1.4. Betragt følgende ODE:

$$y(x)y'(x) + 36x = 0,$$

der kan omskrives til

$$y(x)y'(x) = -36x,$$

som er på separeret form med $g(y) = y$ og $f(x) = -36x$. Vi finder stamfunktioner $G = \int g(y)\,\mathrm{d}y$ og $F = \int f(x)\,\mathrm{d}x$:

$$G(y) = \frac{1}{2}y^2 \quad \text{og} \quad F(x) = -18x^2.$$

Separation af de variable giver altså:

$$\frac{1}{2}y^2(x) = -18x^2 + k,$$

hvor k er en vilkårlig integrationskonstant. Vi isolerer y i ovenstående:

$$y(x) = \pm\sqrt{c - 36x^2},$$

hvor $c = 2k$, som kun er defineret, når $c - 36x^2 \geq 0$. Vi tjekker efter:

$$y(x)y'(x) + 36x = \pm\sqrt{c - 36x^2}\frac{\mp 72x}{2\sqrt{c - 36x^2}} + 36x = 0$$

som ønsket.

Eksempel 1.1.1.5. Betragt følgende ODE:

$$y'(t) = -Ay(t)\ln(y(t)),$$

hvor $A > 0$ og $y \geq 0$, der for $y \neq 1$ kan omskrives til

$$y'(t)\frac{1}{y(t)\ln(y(t))} = -A,$$

som er på separeret form med $g(y) = \frac{1}{y\ln(y)}$ og $f(t) = -A$. Vi bemærker, at $y \equiv 1$ er en løsning. Vi finder stamfunktioner $G = \int g(y)\,\mathrm{d}y$ og $F = \int f(t)\,\mathrm{d}t$:

$$G(y) = \ln(a\ln(y)) \quad \text{og} \quad F(t) = -At,$$

hvor $a \neq 0$ er en konstant hvis fortegn afhænger af, om y er større eller mindre end 1. Separation af de variable giver altså:

$$\ln(a\ln(y)) = -At + k$$

hvor k er en vilkårlig integrationskonstant. Vi isolerer y i ovenstående:

$$y(t) = e^{e^{\ln(a\ln(y))}} = e^{ae^{-At+k}} = e^{ae^k e^{-At}} = c^{e^{-At}},$$

hvor $c = e^{ae^k} > 0$ er en konstant, som ikke kan være 1, da $a \neq 0$. Vi bemærker dog, at $c = 1$ svarer til $y \equiv 1$, som vi allerede ved er en løsning. Vi tjekker, om vi har regnet rigtigt:

$$y'(t) = -Ae^{-At}\ln(c)c^{e^{-At}} = -Ac^{e^{-At}}\ln\left(c^{e^{-At}}\right),$$

som påstået (bemærk, at disse udregninger også gælder for $c = 1$, idet $\ln(1) = 0$).

1.1.2 Eksakte ODE'er

Eksempel 1.1.2.1. Betragt BVP'et

$$2xy(x) - 9x^2 + (2y(x) + x^2 + 1)y'(x) = 0, \quad y(0) = -3.$$

Hvis vi skriver $M(x,y) = 2xy - 9x^2$ og $N(x,y) = 2y + x^2 + 1$, så er ODE'en på formen

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x))y'(x) = 0,$$

og vi tjekker for eksakthed:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 2x \quad \text{og} \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 2x,$$

så ODE'en er altså eksakt. Vi har altså at y er løsning til en ligning på formen $u(x, y(x)) = c$, og vi går derfor på jagt efter denne funktion u. Først findes en stamfunktion $f(\cdot, y) = \int M(t,y)\,\mathrm{d}t$ (vi behøver ikke bekymre os om integrationskonstanten; den indgår i den ukendte konstant c):

$$f(x,y) = x^2y - 3x^3.$$

Herefter finder vi g:

$$g(y) = 2y + x^2 + 1 - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x^2 + 1 - x^2 = 2y + 1.$$

Da $u(x,\cdot) = f(x,\cdot) - \int g(t)\,\mathrm{d}t$ finder vi nu en stamfunktion $G = \int g(t)\,\mathrm{d}t$ (igen kan vi undlade at bekymre os om integrationskonstanten af samme grund som før):

$$G(y) = y^2 + y.$$

Altså er u givet ved

$$u(x,y) = f(x,y) - G(y) = x^2y - 3x^3 + y^2 + y,$$

og løsningen y til BVP'et opfylder altså

$$u(x, y(x)) = x^2y(x) - 3x^3 + y(x)^2 + y(x) = c.$$

Først finder vi c ved at indsætte BB'en $y(0) = -3$:

$$u(0,-3) = 0 \cdot (-3) - 3 \cdot 0^3 + (-3)^2 + (-3) = 6,$$

hvorefter vi går i gang med at isolere $y(x)$:

$$x^2y(x) - 3x^3 + y(x)^2 + y(x) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad y(x)^2 + (x^2+1)y(x) - (3x^3 - 6) = 0,$$

så

$$y(x) = \frac{-(x^2+1) \pm \sqrt{(x^2+1)^2 - 4(3x^3-6)}}{2},$$

hvor vi afgør, om det er "$+$" eller "$-$" i "$\pm$" ved igen at indsætte BB'en:

$$y(0) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} 2 & \text{for "}+\text{"} \\ -3 & \text{for "}-\text{"} \end{cases},$$

så løsningen er altså

$$y(x) = \frac{-(x^2+1) - \sqrt{(x^2+1)^2 - 4(3x^3-6)}}{2}.$$

Bemærk, at denne løsning ikke er defineret for alle x, da indmaden i kvadratroden kan blive negativ for visse værdier af x!

1.1.3 Integrerende faktorer

Eksempel 1.1.3.1. Betragt ODE'en

$$x^4 + y(x)^2 - xy(x)y'(x) = 0.$$

Hvis vi skriver $P(x,y) = x^4 + y^2$ og $Q(x,y) = -xy$, så er ODE'en på formen

$$P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x) = 0,$$

og vi tjekker for eksakthed:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2y \quad \text{og} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -y,$$

så ODE'en er ikke eksakt. Men

$$R(x,y) = \frac{1}{Q(x,y)}\Big(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\Big) = \frac{1}{-xy}(2y - (-y)) = \frac{-3}{x}$$

er konstant som funktion af y for fastholdt x, så

$$F = \exp \int R(x,y)\,\mathrm{d}x = \exp \int \frac{-3}{x}\,\mathrm{d}x$$

er en integrerende faktor. Lad os finde F:

$$\int_1^x \frac{-3}{t}\,\mathrm{d}t = \big[-3\ln(|t|)\big]_{t=1}^x = -3\ln(|x|),$$

så

$$F(x) = \exp(-3\ln(|x|) + k) = \exp(\ln(|x|))^3 e^k = \frac{c}{x^3},$$

hvor $c = \pm e^k \neq 0$ er en konstant, som vi frit kan vælge. Eksempelvis for $c = 1$ er altså

$$F(x)P(x,y(x)) + F(x)Q(x,y(x))y'(x) = x + \frac{y(x)^2}{x^3} - \frac{y(x)}{x^2}y'(x) = M(x,y(x)) + N(x,y(x))y'(x) = 0$$

eksakt:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^3} \quad \text{og} \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = -(-2)\frac{y}{x^3}.$$

1.1.4 Homogene lineære ODE'er

Eksempel 1.1.4.1. Betragt ODE'en

$$y'(x) + (2x + \tfrac{1}{x})y(x) = 0.$$

Hvis vi skriver $p(x) = (2x + \frac{1}{x})$, så kan den også skrives

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0,$$

og for alle tal c er

$$y = ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

derfor en løsning. Vi begynder med at finde $P = \int p(x)\,\mathrm{d}x$ (vi husker, at vi kan være ligeglade med integrationskonstanten, da den blot svarer til at ændre konstanten c):

$$P(x) = \int^x p(t)\,\mathrm{d}t = \int^x (2t + \tfrac{1}{t})\,\mathrm{d}t = x^2 + \ln(|x|),$$

og altså er

$$y(x) = ce^{-P(x)} = ce^{-x^2 - \ln(|x|)} = ce^{-x^2} e^{-\ln(|x|)} = c\frac{e^{-x^2}}{|x|} = \tilde{c}\frac{e^{-x^2}}{x},$$

hvor $\tilde{c} = \pm c$ er en vilkårlig konstant, den ønskede løsning.

1.1.5 Inhomogene lineære ODE'er

Eksempel 1.1.5.1. Betragt ODE'en

$$y'(x) = \tfrac{2}{x} y(x) - x^2 \sin(x),$$

som kan omskrives til

$$y'(x) + p(x)y(x) = r(x),$$

hvor $p(x) = -\frac{2}{x}$ og $r(x) = -x^2 \sin(x)$. For at finde løsningen skal vi først finde $h = \int p(x)\,\mathrm{d}x$ (husk, at vi er ligeglade med integrationskonstanter, da det blot svarer til at vælge et andet c i sidste ende):

$$h(x) = \int^x p(t)\,\mathrm{d}t = -2\int^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -2\ln(|x|) = -\ln(x^2).$$

Dernæst udregnes $\int e^{h(x)} r(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\int^x e^{h(t)} r(t)\,\mathrm{d}t = \int^x e^{-\ln(t^2)}(-t^2 \sin(t))\,\mathrm{d}t = -\int^x (e^{\ln(t^2)})^{-1} t^2 \sin(t)\,\mathrm{d}t = -\int^x \frac{t^2}{t^2}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \cos(x),$$

hvor vi igen kan springe integrationskonstanten over. Nu er

$$y(x) = e^{-h(x)}\Big(\int^x e^{h(t)} r(t)\,\mathrm{d}t + c\Big) = x^2\cos(x) + cx^2$$

den generelle løsning.

1.1.6 Bernoulli-ligningen

Eksempel 1.1.6.1. Betragt ODE'en

$$y'(x) + y(x) - (x^2 + 4x)\sqrt{y(x)} = 0,$$

som kan omskrives til

$$y'(x) + p(x)y(x) = g(x)y(x)^a,$$

hvor $p(x) = 1$, $g(x) = x^2 + 4x$ og $a = \frac{1}{2}$. For at finde y skal vi først finde u, hvor

$$y(x) = u(x)^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = u(x)^2$$

og u opfylder

$$u'(x) + \tfrac{1}{2}u(x) = u'(x) + (1-a)p(x)u(x) = (1-a)g(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + 2x$$

eller blot

$$u'(x) + \tfrac{1}{2}u(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + 2x,$$

som kan løses med metoden til at løse inhomogene lineære ODE'er af første orden:

$$h(x) = \int^x \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{x}{2},$$

og

$$\int^x e^{\frac{t}{2}}(\tfrac{1}{2}t^2 + 2t)\,\mathrm{d}t = e^{\frac{x}{2}}x^2.$$

Altså er

$$u(x) = e^{-\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}}x^2 + c)$$

og dermed er

$$y(x) = u(x)^2 = e^{-x}(e^{\frac{x}{2}}x^2 + c)^2$$

den generelle løsning for vilkårligt $c \in \mathbb{R}$.

1.2 Metoder til ODE'er af anden orden

1.2.1 Homogene lineære ODE'er

1.2.1.1 Linearitet af løsninger

Eksempel 1.2.1.1. Betragt BVP'et

$$y''(x) = y(x), \quad y(\ln(2)) = 2, \quad y'(\ln(2)) = 4.$$

ODE'en har løsningerne $y_1(x) = e^x$ og $y_2(x) = e^{-x}$. Vi finder y_1' og y_2':

$$y_1'(x) = e^x \quad \text{og} \quad y_2'(x) = -e^{-x},$$

De to løsninger er lineært uafhængige, da Wronski-determinanten

$$W(y_1,y_2)(x) = e^x \cdot (-e^{-x}) - e^{-x}e^x = -2$$

ikke er 0. Derfor er alle løsninger på formen $y_0 = ay_1 + by_2$, og vi kan nu bestemme a og b, så begyndelsesbetingelserne er opfyldte. Vi får de to ligninger med to ubekendte

$$\begin{aligned} 2 = y_0(\ln(2)) = ay_1(\ln(2)) + by_2(\ln(2)) = a2 + b\tfrac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad 2a + \tfrac{1}{2}b = 2 \\ 4 = y_0(\ln(2)) = ay_1'(\ln(2)) + by_2(\ln(2)) = a2 + b(-\tfrac{1}{2}) \quad &\Leftrightarrow \quad 2a - \tfrac{1}{2}b = 4 \end{aligned}$$

som har den entydige løsning $a = \frac{3}{2}$ og $b = -2$. Løsningen til BVP'et er altså $y_0(x) = \frac{3}{2}e^x - 2e^{-x}$.

1.2.1.2 Reduktion af orden

Eksempel 1.2.1.2. Betragt ODE'en

$$(x^2 - x)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0. \tag{1}$$

og lad $y_1(x) = x$. Så er y_1 en løsning (tjek selv efter). Vi bruger nu metoden *reduktion af orden* til at finde en anden, lineært uafhængig løsning. Først skal (1) omskrives til standardform:

$$y''(x) - \frac{x}{x^2 - x}y'(x) + \frac{1}{x^2 - x}y(x) = 0,$$

og vi har altså $p(x) = \frac{x}{x^2-x} = \frac{1}{x-1}$. Så er

$$v_1(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\int^x p(t)\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{x^2}e^{\ln(|x-1|)} = \frac{|x-1|}{x^2} = \left|\frac{x-1}{x^2}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right|,$$

hvor vi kan droppe numerisk værdi-tegnene, da det blot svarer til evt. at gange med -1 (for $x < 0$). Altså bliver

$$u(x) = \int^x (\tfrac{1}{t} - \tfrac{1}{t^2})\,\mathrm{d}t = \ln|x| + \frac{1}{x},$$

så $y_2(x) = y_1(x)u(x) = x\ln|x| + 1$ er en anden (lineært uafhængig) løsning.

1.2.1.3 Konstante koefficienter

Eksempel 1.2.1.3. Betragt ODE'en

$$y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = 0,$$

som er en homogen lineær ODE af anden orden hvor $a = 3$, $b = -4$. Først bestemmer vi diskriminanten:

$$a^2 - 4b = 3^2 - 4(-4) = 9 + 16 = 25,$$

og vi har dermed positiv diskriminant. Vi skal derfor finde $\lambda_\pm$:

$$\lambda_\pm = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 1 & \text{for "+"} \\ -4 & \text{for "−"} \end{cases},$$

og den generelle løsning er derfor

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-4x},$$

og der er således både voksende og aftagende løsninger.

Eksempel 1.2.1.4. Betragt ODE'en

$$y''(x) - 8y'(x) + 25y(x) = 0,$$

som er en homogen lineær ODE af anden orden hvor $a = -8$, $b = 25$. Først bestemmer vi diskriminanten:

$$a^2 - 4b = (-8)^2 - 4 \cdot 25 = 64 - 100 = -36,$$

og vi har dermed negativ diskriminant. Vi skal derfor finde ω:

$$\omega = \sqrt{b - \frac{a}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3,$$

og den generelle løsning er derfor

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{-8x}{2}} \cos(3x) + c_2 e^{-\frac{-8x}{2}} \sin(3x) = c_1 e^{4x} \cos(3x) + c_2 e^{4x} \sin(3x),$$

og løsningerne er dermed voksende og oscillerende (eller identisk 0).

1.2.1.4 Euler-Cauchy-ligninger

Eksempel 1.2.1.5. Betragt ODE'en

$$x^2 y''(x) + 6xy'(x) + 4y(x) = 0,$$

som er en homogen Euler-Cauchy-ligning med $a = 6$ og $b = 4$. Først bestemmer vi determinanten:

$$(a-1)^2 - 4b = (6-1)^2 - 4 \cdot 4 = 9 > 0,$$

og vi har dermed positiv determinant. Dvs. $m_\pm = \frac{1-6}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a-1)^2 - b} = -\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$ og den generelle løsning er derfor

$$y(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-4}.$$

1.2.2 Ikke-homogene, lineære ODE'er

1.2.2.1 Linearitet af løsninger

Eksempel 1.2.2.1. Det ses let, at ODE'en

$$y''(x) + y(x) = 2e^x. \tag{2}$$

har $y_p(x) = e^x$ som løsning. Alle løsninger til den tilhørende homogene ODE

$$y''(x) + y(x) = 0 \tag{3}$$

er på formen $y_h(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$. Den generelle løsning til (2) er derfor

$$y_g(x) = e^x + a\cos(x) + b\sin(x).$$

Hvis vi sætter $y_1(x) = e^x + \cos(x)$ og $y_2(x) = e^x - \sin(x)$, så er y_1 og y_2 altså begge løsninger til (2) og $y_3(x) = y_1(x) - y_2(x) = \cos(x) + \sin(x)$ er en løsning til (3).

1.2.2.2 De ubestemte koefficienters metode

Eksempel 1.2.2.2. Betragt ODE'en

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{-x} + 4\cos(2x), \tag{4}$$

som er på formen

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = r(x)$$

med $a = 2, b = 1$ og $r(x) = e^{-x} + 4\cos(2x)$. Vi ønsker at finde en partikulær løsning. Da $r = r_1 + r_2$, hvor $r_1(x) = e^{-x}$, som er på formen $ke^{\gamma x}$ med $k = 1$ og $\gamma = -1$, og $r_2(x) = 4\cos(2x)$, som er på formen $k\sin(\omega x)$ med $k = 4$ og $\omega = 2$, så sætter vi $f_1(x) = Ce^{-x}$ og $f_2(x) = K\cos(2x) + M\sin(2x)$. Hvis vi sætter f_1 ind på y's plads i

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x)$$

fås

$$f_1''(x) + 2f_1'(x) + f_1(x) = C(-1)^2e^{-x} + C(-1)e^{-x} + Ce^{-x} = 0.$$

Det ses, at f_1 løser den homogene ligning, og vi prøver derfor med $\tilde{f}_1 \colon x \mapsto xf_1(x)$:

$$\tilde{f}_1''(x) + 2\tilde{f}_1'(x) + \tilde{f}_1(x) = C(-1e^{-x} - 1 \cdot e^{-x} - x(-1)e^{-x}) + 2C(1 \cdot e^{-x} + x(-1)e^{-x}) + Cxe^{-x} = 0,$$

så $\tilde{f}_1$ løser også den homogene ligning. Vi skal altså bruge $\check{f}_1 \colon x \mapsto Cx^2e^{-x}$:

$$\begin{aligned}\check{f}_1''(x) + 2\check{f}_1'(x) + \check{f}_1(x) &= C(x^2 - 4x + 2)e^{-x} + 2C(2x - x^2)e^{-x} + Cx^2e^{-x} \\ &= 2Ce^{-x}.\end{aligned}$$

Sætter vi $C = \frac{1}{2}$, så får vi altså $r_1(x)$.

For f_2's vedkommende får vi

$$\begin{aligned}f_2''(x) + 2f_2'(x) + f_2(x) &= (-2^2K\cos(2x) - 2^2M\sin(2x)) \\ &\quad + 2(-2K\sin(2x) + 2M\cos(2x)) \\ &\quad + (K\cos(2x) + M\sin(2x)) \\ &= (-3K + 4M)\cos(2x) + (-3M - 4K)\sin(2x).\end{aligned}$$

Hvis dette skal give $4\cos(2x)$, skal vi altså have $-3K + 4M = 4$ og $-3M - 4K = 0$. Disse to ligninger med to ubekendte har løsningen $K = -\frac{12}{25}$ og $M = \frac{16}{25}$. Vi får altså, at

$$y_p(x) = \tfrac{1}{2}x^2e^{-x} - \tfrac{12}{25}\cos(2x) + \tfrac{16}{25}\sin(2x)$$

er en løsning til (4).

1.2.2.3 Forstyrrede masse-fjeder-systemer

Eksempel 1.2.2.3. Betragt ODE'en

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 10\cos((2\sqrt{2} - \sqrt{3})t),$$

som er på formen

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = F_0\cos(\omega t)$$

med $m = 1$, $c = 2$, $k = 5$, $F_0 = 10$ og $\omega = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$. Så er $\omega_0 = \sqrt{\frac{5}{1}} = \sqrt{5}$. Vi har derfor en løsning, som ser ud som følger:

$$y_p(t) = (\sqrt{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}) \cos((2\sqrt{2} - \sqrt{3})t + \tfrac{\pi}{6}),$$

idet $\frac{10}{\sqrt{1^2 \cdot (5-(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2)^2 + (2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 \cdot 2^2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ og $\arctan\left(\frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{3})2}{1 \cdot (5-(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2)}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Nu er $0 < 2^2 \leq 2 \cdot 1 \cdot 5$ og altså $0 < c^2 \leq 2mk$. Da $\omega = 2\sqrt{2} - \sqrt{3} \neq \sqrt{\frac{5}{1} - \frac{2^2}{2 \cdot 1^1}} = \sqrt{3}$, betyder det, at frekvensen $\omega = \sqrt{3}$ ville give en løsning med en højere amplitude. Mere konkret har ODE'en

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 10 \cos(\sqrt{3}t)$$

løsningen

$$y_p(t) = 2{,}5 \cos(\sqrt{3}t + \tfrac{\pi}{3}),$$

idet $\frac{2 \cdot 1 \cdot 10}{2\sqrt{4 \cdot 1^2 \cdot 5 - 2^2}} = 2{,}5$ og $\arctan(\frac{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$. Da $\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} < 2{,}5$, giver $\omega = \sqrt{3}$ altså en højere amplitude end $\omega = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$ som påstået.

1.2.2.4 De arbitrære parametres variationsmetode

Eksempel 1.2.2.4. Betragt ODE'en

$$y''(x) + y(x) = \sec(x), \tag{5}$$

hvor vi husker, at $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, som altså er på formen

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x)$$

med $p \equiv 0$, $q \equiv 1$ og $r = \sec$. Vi ser, at $r = \sec$ ikke er at finde i listen over funktioner, som vi kan klare med de ubestemte koefficienters metode, og vi må derfor ty til de arbitrære parametres variationsmetode. Til gengæld er p og q konstanter, hvilket kommer os til nytte, idet metoden kræver, at vi først løser det tilhørende homogene system,

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0. \tag{6}$$

Eksempelvis vha. metoden til homogene, lineære ODE'er af orden 2 med konstante koefficienter fås altså, at y_1 og y_2 givet ved

$$y_1(x) = \cos(x) \quad \text{og} \quad y_2(x) = \sin(x)$$

løser (6). Dermed er

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2(x)r(x)}{W(x)} \,\mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1(x)r(x)}{W(x)} \,\mathrm{d}x$$

en løsning til (5), hvor $W(x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x)) \equiv 1$. Vi skal altså finde stamfunktioner $u_1 = \int \frac{y_2(x)r(x)}{W(x)} \,\mathrm{d}x$ og $u_2 = \int \frac{y_1(x)r(x)}{W(x)} \,\mathrm{d}x$:

$$u_1(x) = \int^x \frac{\sin(t)\sec(t)}{1} \,\mathrm{d}t = \int^x \tan(t) \,\mathrm{d}t = -\ln(|\cos(x)|)$$

og

$$u_2(x) = \int^x \frac{\cos(t)\sec(t)}{1}\,\mathrm{d}t = \int^x 1\,\mathrm{d}t = x,$$

idet vi ikke behøver at bekymre os om integrationskonstanter, da de blot svarer til at lægge en homogen løsning til den partikulære løsning. Alt i alt fås altså, at

$$y_p(x) = -\sin(x)(-\ln(|\cos(x)|)) + \cos(x)x = x\cos(x) + \ln(|\cos(x)|)\sin(x)$$

er en partikulær løsning til (5).

1.3 Laplace-transformationen

1.3.1 Laplace-transformationen af udvalgte funktioner

Eksempel 1.3.1.1. Betragt funktionen $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ givet ved $f(t) = e^{3t}$. Så er Laplace-transformationen $F = \mathcal{L}(f)$ af f givet ved $F(s) = \frac{1}{s-3}$.

Eksempel 1.3.1.2. Betragt funktionen $G\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ givet ved $G(s) = \frac{7}{s^2-6s+58}$. Så er den inverse Laplace-transformation $g = \mathcal{L}^{-1}(G)$ af G givet ved $g(t) = e^{3t}\sin(7t)$, idet vi ser at G kan omskrives på følgende måde: $G(s) = \frac{7}{(s^2-6s+9)+49} = \frac{7}{(s-3)^2+7^2}$.

1.3.2 Linearitet af Laplace-transformationen og dens inverse

Eksempel 1.3.2.1. Betragt funktionen $j(t) = \frac{1}{2}t^2 + 11e^{-2t}\cos(2\pi t) + 7$. Hvis vi skriver $f(t) = t^2$, $g(t) = e^{-2t}\cos(3t)$ og $h(t) = 1$, så kan j skrives som $j = \frac{1}{2}f + 11g + 7h$. Dermed er $J = \mathcal{L}(j)$ givet ved

$$\begin{aligned} J(s) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2!}{s^3} + 11\cdot\frac{s-(-2)}{(s-(-2))^2+3^2} + 7\cdot\frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s^3} + \frac{11s+22}{s^2+4s+11} + \frac{7}{s}. \end{aligned}$$

Eksempel 1.3.2.2. Betragt funktionen F givet ved $F(s) = \frac{1}{s^2-6s+58}$. Sæt $G(s) = \frac{7}{(s-3)^2+7^2}$. Så er $F(s) = \frac{1}{7}\cdot\frac{7}{(s-3)^2+7^2} = \frac{1}{7}G(s)$, og den inverse Laplace-transformation $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$ af F er givet ved $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(t) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{7}G)(t) = \frac{1}{7}e^{3t}\sin(7t)$.

1.3.3 Forskydning af s-variablen

Eksempel 1.3.3.1. Betragt funktionen f givet ved $f(t) = t^3$. Laplace-transformationen $F = \mathcal{L}(f)$ af f er givet ved $F(s) = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$. Så er Laplace-transformationen af g givet ved $g(t) = e^{-3t}f(t) = e^{-3t}t^3$ altså $\mathcal{L}(g)(s) = \mathcal{L}(t \mapsto e^{-3t}t^3)(s) = F(s-(-3)) = F(s+3) = \frac{6}{(s+3)^4}$.

1.3.4 Laplace-transformationen af afledede

Eksempel 1.3.4.1. Lad $f(t) = e^{-t}\sin(3t)$. Så er $\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \frac{3}{(s-(-1))^2+3^2} = \frac{3}{s^2+2s+10}$. Vi ønsker at finde $\mathcal{L}(f'')$. Da $f(0) = 0$ og $f'(0) = -1\cdot e^{-0}\sin(3\cdot 0) + e^{-0}\cdot 3\cdot\cos(3\cdot 0) = 3$, så er

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2\frac{3}{s^2+2s+10} - s\cdot 0 - 3 = \frac{3s^2}{s^2+2s+10} - 3 = \frac{-6s-30}{s^2+2s+10}.$$

1.3.5 Laplace-transformationen af integraler

Eksempel 1.3.5.1. Lad $f(t) = t^2$. Så er $g(t) := \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}t^3$ og $\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}$. Dvs. $G(s) = \mathcal{L}(g)(s) = \frac{1}{s}F(s) = \frac{1}{s}\frac{2}{s^3} = \frac{2}{s^4}$, hvilket stemmer overens med at $\mathcal{L}(t \mapsto t^3)(s) = \frac{6}{s^4}$.

1.3.6 Løsning af begyndelsesværdiproblemer

1.3.6.1 Begyndelsesværdiproblemer med $t_0 = 0$

Eksempel 1.3.6.1. Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$y''(t) - y(t) = t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Vi bemærker at $Q(s) = \frac{1}{s^2-1}$ og da $r(t) = t$, er $\mathcal{L}(r) = \frac{1}{s^2}$, så

$$Y(s) = \big((s+0)\cdot 1 + 1\big)\frac{1}{s^2-1} + \frac{1}{s^2}\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{s-1} + \Big(\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2}\Big) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2}.$$

Vha. linearitet og tabelopslag fås nu

$$y(t) = e^t + \sinh(t) - t.$$

1.3.6.2 Forskydning af begyndelsesværdibetingelsen

Eksempel 1.3.6.2. Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^2\pi^2 e^{-2t}\cos(\pi t), \quad y(1) = 2 \quad y'(1) = -3.$$

Da dette problem har begyndelsesværdibetingelser i $t_0 = 1 \neq 0$, kan Laplace-metoden ikke bruges umiddelbart. Vi skal derfor forskyde begyndelsesværdibetingelsen: Hvis vi skriver $\tilde{t} = t - 1$ og $\tilde{t}_0 = t_0 - 1 = 0$, så kan begyndelsesværdiproblemet skrives

$$y''(\tilde{t}+1) + 4y'(\tilde{t}+1) + 4y(\tilde{t}+1) = e^2\pi^2 e^{-2(\tilde{t}+1)}\cos(\pi(\tilde{t}+1)), \quad y(\tilde{t}_0+1) = 2 \quad y'(\tilde{t}_0+1) = -3.$$

Hvis vi nu skriver $\tilde{y}(\tilde{t}) = y(\tilde{t}+1)$, så får vi i stedet

$$\tilde{y}''(\tilde{t}) + 4\tilde{y}'(\tilde{t}) + 4\tilde{y}(\tilde{t}) = \pi^2 e^{-2\tilde{t}}\cos(\pi\tilde{t}+\pi), \quad \tilde{y}(\tilde{t}_0) = 2 \quad \tilde{y}'(\tilde{t}_0) = -3,$$

og da $\tilde{t}_0 = 0$, har vi nu et begyndelsesværdiproblem for $\tilde{y}$, som er på den rigtige form. Altså fås med $\tilde{r}(\tilde{t}) = \pi^2 e^{-2\tilde{t}}\cos(\pi\tilde{t}+\pi) = -\pi^2 e^{-2\tilde{t}}\cos(\pi\tilde{t})$ og altså $\tilde{R}(s) = -\pi^2\frac{s-(-2)}{(s-(-2))^2+\pi^2} = -\pi^2\frac{s+2}{(s+2)^2+\pi^2}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}(s) &= ((s+4)2-3)\frac{1}{(s+2)^2+4-\frac{1}{4}4^2} - \pi^2\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+\pi^2}\cdot\frac{1}{(s+2)^2+4-\frac{1}{4}4^2} \\
&= \frac{2s+5}{(s+2)^2} - \frac{1}{(s+2)^2+\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{s+2} \\
&= \frac{1}{(s-(-2))^2} + \frac{1}{s-(-2)} + \frac{s-(-2)}{(s-(-2))^2+\pi^2},
\end{aligned}$$

som alle er s-forskudt med $a = -2$. Se i øvrigt Eksempel 1.3.7.1 for deltaljer ang. omskrivningen. Vha. tabelopslag ser vi, at $\frac{1}{s^2} = \mathcal{L}(t \mapsto t)$, $\frac{1}{s} = \mathcal{L}(t \mapsto 1)$ og $\frac{s}{s^2+\pi^2} = \mathcal{L}(t \mapsto \cos(\pi t))$, og dermed er

$$\tilde{y}(\tilde{t}) = e^{-2\tilde{t}}(\tilde{t} + 1 + \cos(\pi \tilde{t})).$$

Vi skulle finde y, men da $\tilde{t} = t - 1$ er $y(t) = y(\tilde{t} + 1) = \tilde{y}(\tilde{t}) = \tilde{y}(t-1)$, så

$$y(t) = e^{-2(t-1)}((t-1) + 1 + \cos(\pi(t-1))) = e^{2-2t}(t - \cos(\pi t))$$

er vores søgte løsning.

1.3.7 Partialbrøker

Eksempel 1.3.7.1. Betragt følgende udtryk fra Eksempel 1.3.6.2

$$\frac{2s+5}{(s+2)^2} - \frac{1}{(s+2)^2+\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{s+2}. \tag{7}$$

I Eksempel 1.3.6.2 påstås det uden nærmere uddybning, at udtrykket (7) også kan skrives som $\frac{1}{(s-(-2))^2} + \frac{1}{s-(-2)} + \frac{s-(-2)}{(s-(-2))^2+\pi^2}$. For at vise, hvordan dette udtryk er fundet, sætter vi først på fælles brøkstreg:

$$\begin{aligned}
\frac{2s+5}{(s+2)^2} - \frac{1}{(s+2)^2+\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{s+2} &= \frac{((s+2)^2+\pi^2)(2s+5)}{((s+2)^2+\pi^2)(s+2)^2} - \frac{\pi^2(s+2)}{((s+2)^2+\pi^2)(s+2)^2} \\
&= \frac{((s+2)^2+\pi^2)(2s+5) - \pi^2(s+2)}{((s+2)^2+\pi^2)(s+2)^2} \\
&= \frac{2s^3 + 13s^2 + (28+\pi^2)s + (20+3\pi^2)}{(s+2)(s+2)((s+2)^2+\pi^2)} \\
&= \frac{P(s)}{Q(s)},
\end{aligned}$$

så da $(s+2)^2 + \pi^2 = (s + \frac{1}{2}4)^2 + (\pi^2 + 4) - \frac{1}{4}4^2$ ikke har nogen reelle rødder, er $\frac{P(s)}{Q(s)}$ en polynomiumsbrøk på den rigtige form med $n = 2$, $m = 1$, $r_1 = r_2 = -2$, $a_1 = 4$, $b_1^2 = \pi + 4$ og $P(s)$ er et polynomium af grad $n + 2m - 1 = 3$. Da $r_1 = r_2$ skal vi altså finde $2 + 2 \cdot 1 = 4$ konstanter A_1, A_2, B_1 og C_1, så

$$\begin{aligned}
2s^3 + 13s^2 + (28+\pi^2)s + (20+3\pi^2) &= ((s+2)^2+\pi^2)(2s+5) - \pi^2(s+2) \\
&= A_1(s+2)((s+2)^2+\pi^2) + A_2((s+2)^2+\pi^2) \\
&\quad + (B_1 s + C_1)(s+2)(s+2) \\
&= (A_1+B_1)s^3 + (6A_1 + A_2 + 4B_1 + C_1)s^2 \\
&\quad + ((\pi^2+12)A_1 + 4A_2 + 4B_1 + 4C_1)s \\
&\quad + ((2\pi^2+8)A_1 + (4+\pi^2)A_2 + 4C_1),
\end{aligned} \tag{8}$$

som giver følgende fire ligninger med fire ubekendte

$$\begin{aligned}
2 &= A_1 + B_1 \\
13 &= 6A_1 + A_2 + 4B_1 + C_1 \\
28 + \pi^2 &= (\pi^2+12)A_1 + 4A_2 + 4B_1 + 4C_1 \\
20 + 3\pi^2 &= (2\pi^2+8)A_1 + (4+\pi^2)A_2 + 4C_1,
\end{aligned}$$

med den unikke løsning $A_1 = A_2 = B_1 = 1$, $C_1 = 2$. Dermed er

$$\frac{2s+5}{(s+2)^2} - \frac{1}{(s+2)^2+\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{s+2} = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{(s+2)^2} + \frac{B_1 s + C_1}{(s+2)^2+\pi^2}$$

som hævdet.

Det kan i øvrigt bemærkes, at (8) gælder for alle s, og specielt også for $s = r_1 = r_2 = -2$. Det ses let, at $((s+2)^2+\pi^2)(2s+5) - \pi^2(s+2)$ fra (8) giver π^2, når man sætter $s = -2$ ind, mens udtrykket $A_1(s+2)((s+2)^2+\pi^2)+A_2((s+2)^2+\pi^2)+(B_1 s+C_1)(s+2)(s+2)$ også fra (8) giver $A_2\pi^2$, hvorved det let ses, at $A_2 = 1$, uden at vi behøver at løse flere ligninger med flere ubekendte. Da $(s+2)^2+\pi^2$ ingen reelle rødder har, og da $s = -2$ er en dobbeltrod, kan vi desværre ikke finde de andre konstanter, A_1, B_1 og C_1 på samme lette måde, men hvis $Q(s)$ kun har simple, reelle rødder er dette faktisk en meget brugbar metode, som gør, at man slipper for en masse omskrivninger. Se også Eksempel 1.3.7.2.

Eksempel 1.3.7.2. Betragt følgende polynomiumsbrøk:

$$\frac{3{,}5s^2+4s-22{,}5}{(s^2+7s+12)(s-3)} = \frac{3{,}5s^2+4s-22{,}5}{(s+4)(s+3)(s-3)} = \frac{P(s)}{Q(s)},$$

hvor altså $m = 0$, $r_1 = -4$, $r_2 = -3$ og $r_3 = 3$. Sæt

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{P(-4)}{(-4-(-3))(-4-3)} = \frac{3{,}5\cdot(-4)^2+4\cdot(-4)-22{,}5}{-1\cdot(-7)} = \frac{17{,}5}{7} = 2{,}5,\\
A_2 &= \frac{P(-3)}{(-3-(-4))(-3-3)} = \frac{3{,}5\cdot(-3)^2+4\cdot(-3)-22{,}5}{1\cdot(-6)} = \frac{-3}{-6} = 0{,}5 \quad \text{og}\\
A_3 &= \frac{P(3)}{(3-(-4))(3-(-3))} = \frac{3{,}5\cdot 3^2+4\cdot 3-22{,}5}{7\cdot 6} = \frac{21}{42} = 0{,}5.
\end{aligned}$$

Så er

$$\frac{3{,}5s^2+4s-22{,}5}{(s^2+7s+12)(s-3)} = \frac{2{,}5}{s+4} + \frac{0{,}5}{s+3} + \frac{0{,}5}{s-3}.$$

1.4 Systemer af ODE'er

1.4.1 Konvertering af ODE'er af orden n til systemer af n ODE'er af orden 1

Eksempel 1.4.1.1. Betragt ODE'en

$$my''(t) + cy'(t) + y(t) = 0$$

som kan omskrives til

$$y''(t) = -\frac{c}{m}y'(t) - \frac{k}{m}y(t) = F(t,y(t),y'(t)),$$

hvor $F(t,y,z) = -\frac{c}{m}z - \frac{k}{m}y$. Vi kan nu sætte $y_1 = y$ og $y_2 = y'$ og skrive systemet på formen

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2\\
y_2' &= F(t,y_1,y_2) = -\frac{c}{m}y_2 - \frac{k}{m}y_1.
\end{aligned}$$

Matricen for systemet er således

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}$$

og systemet kan skrives kort som

$$y' = Ay,$$

hvor $y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$.

1.4.2 Systemer af ODE'er af orden 1 med konstante koefficientmatricer

Eksempel 1.4.2.1. Betragt systemet af ODE'er af orden 1 givet ved

$$y' = Ay \qquad \text{hvor} \qquad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{50} & \frac{1}{50} \\ \frac{1}{50} & -\frac{1}{50} \end{pmatrix}.$$

For matricen A har egenværdier og egenvektorer $\lambda_1 = 0$ og $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ samt $\lambda_2 = -\frac{1}{25}$ og $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Den generelle løsning til systemet er derfor

$$y(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{25}t}.$$

1.5 Fourierrækker

1.5.1 Udregning af Fourierkoefficienter mm.

Eksempel 1.5.1.1. Betragt den 2π-periodiske funktion f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{for } -\pi \leq x \leq 0 \\ k & \text{for } 0 < x < \pi \end{cases}, \qquad f(x) = f(x + 2\pi).$$

Først finder vi $a_0(f)$:

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} (-k)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} k\,\mathrm{d}x \right) = 0$$

Dernæst finder vi $a_n(f)$:

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} (-k)\cos(nx)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} k\cos(nx)\,\mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-k \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{x=-\pi}^{0} + \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{x=0}^{\pi} \right) = 0. \end{aligned}$$

Og til sidst finder vi $b_n(f)$:

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0}(-k)\sin(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} k\sin(nx)\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(k\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{x=-\pi}^{0} - \frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{x=0}^{\pi}\Big) \\
&= \frac{k}{n\pi}(\cos(0) - \cos(-n\pi) - \cos(n\pi) + \cos(0)) \\
&= \frac{2k}{n\pi}(1 - \cos(n\pi)) \\
&= \frac{2k}{n\pi}(1 - (-1)^n),
\end{aligned}$$

så $b_1 = \frac{4k}{\pi}$, $b_2 = 0$, $b_3 = \frac{4k}{3\pi}$, $b_4 = 0$, $b_5 = \frac{4k}{5\pi}$, osv. Altså er Fourierrækken for f

$$\frac{4k}{\pi}\Big(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \cdots\Big).$$

Da f er stykkevist kontinuert og har venstre- og højreafledede overalt (de er 0 overalt), så er

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin((2n-1)x)$$

i f's kontinuitetspunkter, dvs. $x \neq m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. I punkterne $x = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ er

$$\frac{4k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin((2n-1)x) = \frac{-k+k}{2} = 0,$$

hvilket også kan ses direkte, idet $\sin((2n-1)m\pi) = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og $m \in \mathbb{Z}$.

1.5.2 Lige og ulige funktioner

Eksempel 1.5.2.1. Lad g være den ulige, 2π-periodiske funktion givet ved

$$g(x) = x \quad \text{for} \quad x \in [-\pi,\pi], \qquad g(x) = g(x+2\pi).$$

Så er $a_n(g) = 0$ for alle $n = 0, 1, 2, \ldots$, og

$$\begin{aligned}
b_n(g) &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} g(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x\cos(nx)}{n}\Big]_{x=0}^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\Big(\frac{0}{n^2} - \frac{\pi\cdot(-1)^n}{n}\Big) - \frac{2}{\pi}\Big(\frac{0}{n^2} - \frac{0\cdot 1}{n}\Big) \\
&= (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

1.5.3 Linearitet af Fourierkoefficienter

Eksempel 1.5.3.1. I Eksempel 1.5.1.1 og Eksempel 1.5.2.1 fandt vi Fourierkoefficienterne for f og g givet ved hhv.

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{for } -\pi \le x \le 0 \\ k & \text{for } 0 < x < \pi \end{cases}, \qquad f(x) = f(x + 2\pi).$$

og

$$g(x) = x \quad \text{for} x \in [-\pi,\pi], \quad g(x) = g(x + 2\pi).$$

Vi kan nu finde Fourierkoefficienterne for h givet ved

$$h(x) = \begin{cases} -\pi - x & \text{for } -\pi \le x \le 0 \\ \pi - x & \text{for } 0 < x < \pi \end{cases}, \qquad h(x) = h(x + 2\pi),$$

idet $h = \frac{\pi}{k} f - g = c_1 f + c_2 g$, hvor $c_1 = \frac{\pi}{k}$ og $c_2 = -1$:

$$a_0(h) = c_1 a_0(f) + c_2 a_0(g) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0,$$

og, for $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$a_n(h) = c_1 a_n(f) + c_2 a_n(g) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$$

samt

$$b_n(h) = c_1 b_n(f) + c_2 b_n(g) = \frac{\pi}{k} \frac{2k}{n\pi}(1 - (-1)^n) - (-1)^{n+1} \frac{2}{n} = \frac{2}{n}.$$

1.5.4 Periodeskift

Eksempel 1.5.4.1. Lad f være den 2-periodiske funktion givet ved

$$f(x) = |x|, \quad \text{for} \quad x \in [-1,1], \qquad f(x) = f(x + 2).$$

Fourierrækken er så givet ved

$$a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(f) \cos\left(\frac{n\pi}{1} x\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{n\pi}{1} x\right) \right),$$

hvor

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{2 \cdot 1} \int_{-1}^{1} |x| \, \mathrm{d}x \\ a_n(f) &= \frac{1}{1} \int_{-1}^{1} |x| \cos\left(\frac{n\pi}{1} x\right) \mathrm{d}x \\ b_n(f) &= \frac{1}{1} \int_{-1}^{1} |x| \sin\left(\frac{n\pi}{1} x\right) \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$. Koefficienternes værdi er udregnet i Eksempel 1.5.5.1 nedenfor.

1.5.5 Halvsidige udviklinger

Eksempel 1.5.5.1. Lad f være den i Eksempel 1.5.4.1 givne funktion. Bemærk, at f er en lige funktion, og vi kan således finde Fourierkoefficienterne og Fourierrækken for f ved at finde Fourierkoefficienterne og Fourierrækken for den 2-periodiske, lige udvidelse af funktionen $\tilde{f}$ givet ved:

$$\tilde{f}(x) = x \quad \text{for} \quad x \in [0,1].$$

Da der er tale om den lige udvidelse, så er $b_n(f) = b_n(\tilde{f}) = 0$ for alle n, mens

$$a_0(f) = a_0(\tilde{f}) = \frac{1}{1}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

og

$$\begin{aligned}
a_n(f) = a_n(\tilde{f}) &= \frac{2}{1}\int_0^1 x\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\left[\frac{\cos(\pi n x)}{\pi^2 n^2} + \frac{x\sin(\pi n x)}{\pi n}\right]_{x=0}^{1} \\
&= 2\Big(\frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} + \frac{1\cdot 0}{\pi n}\Big) - 2\Big(\frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{0\cdot 1}{n}\Big) \\
&= -\big(1-(-1)^n\big)\frac{2}{\pi^2 n^2},
\end{aligned}$$

og Fourierrækken er således

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\big(1-(-1)^n\big)\frac{2}{\pi^2 n^2}\cos\Big(\frac{n\pi}{1}x\Big) \\
&= \frac{1}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2m-1)^2}\cos\big((2m-1)\pi x\big) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi x) - \frac{4}{9\pi^2}\cos(3\pi x) - \frac{4}{25\pi^2}\cos(5\pi x) + \cdots,
\end{aligned}$$

idet $a_n(f) = 0$ for n lige.

Eksempel 1.5.5.2. Lad f være givet ved $f(x) = x(1-x)$ for $x \in [0,1]$. Her er $L = 1$, så $2L = 2$ og Fourierrækken for en 2-periodisk, ulige udvidelse af f er givet ved

$$f_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)\sin\Big(\frac{n\pi}{1}x\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3}\sin(n\pi x),$$

idet

$$b_n(f) = \frac{2}{1}\int_0^1 x(1-x)\sin\Big(\frac{n\pi}{1}x\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3} = \begin{cases} \frac{8}{n^3\pi^3} & \text{for} \quad n \text{ ulige} \\ 0 & \text{for} \quad n \text{ lige} \end{cases},$$

mens Fourierrækken for en 2-periodisk, lige udvidelse er givet ved

$$f_l(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos\Big(\frac{n\pi}{1}x\Big) = \frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1+(-1)^n)}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x),$$

idet

$$a_0(f) = \frac{1}{1}\int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$$

og

$$a_n(f) = \frac{2}{1}\int_0^1 x(1-x)\cos\Big(\frac{n\pi}{1}x\Big)\,\mathrm{d}x = -\frac{2(1+(-1)^n)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi^2} & \text{for} \quad n \text{ lige} \\ 0 & \text{for} \quad n \text{ ulige} \end{cases}.$$

Eksempel 1.5.5.3. Lad g være givet ved $g(x) = x$ for $x \in [0,1]$. Her er $L = 1$, så $2L = 2$ og Fourierrækken for en 2-periodisk, ulige udvidelse af g er givet ved

$$g_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(g)\sin\Big(\frac{n\pi}{1}x\Big) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n\pi}\sin(n\pi x),$$

idet

$$b_n(g) = \frac{2}{1}\int_0^1 x\sin\Big(\frac{n\pi}{1}x\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{-2(-1)^n}{n\pi},$$

mens Fourierrækken for en 2-periodisk, lige udvidelse er givet ved

$$f_l(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos\Big(\frac{n\pi}{1}x\Big) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x),$$

idet

$$a_0(f) = \frac{1}{1}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

og

$$a_n(f) = \frac{2}{1}\int_0^1 x\cos\Big(\frac{n\pi}{1}x\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi^2} & \text{for} \quad n \text{ ulige} \\ 0 & \text{for} \quad n \text{ lige} \end{cases}.$$

1.6 Metoder til PDE'er af anden orden

1.6.1 Den éndimensionelle bølgeligning

1.6.1.1 Fourierrækkemetoden

Eksempel 1.6.1.1. Betragt den éndimensionelle bølgeligning $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ på $[0,1]$ med randbetingelse $u(0,t) = u(L,t) = 0$ og begyndelsesværdibetingelsen

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{og} \quad u_t(x,0) = g(x),$$

hvor f er givet ved $f(x) = x(1-x)$ og g er givet ved $g(x) = x$. Så er

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\big(b_n\cos(\lambda_n t) + b_n^*\sin(\lambda_n t)\big)\sin\Big(\frac{n\pi}{1}x\Big),$$

hvor $\lambda_n = \frac{cn\pi}{1}$, $b_n = b_n(f) = \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3}$ og $b_n^* = \frac{1}{cn\pi}b_n(g) = \frac{-2(-1)^2}{cn^2\pi^2}$, hvor Fourierkoefficienterne $b_n(f)$ og $b_n(g)$ er udregnet i hhv. Eksempel 1.5.5.2 og Eksempel 1.5.5.3.

1.6.1.2 D'Alemberts løsning

Eksempel 1.6.1.2. Betragt den éndimensionelle bølgeligning $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ på $[0,1]$ med randbetingelse $u(0,t) = u(L,t) = 0$ og begyndelsesværdibetingelsen

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{og} \quad u_t(x,0) = g(x),$$

hvor f er givet ved $f(x) = x(1-x)$ og g er givet ved $g(x) = x$. Så er

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\big((x+ct)(1-(x+ct)) + (x-ct)(1-(x-ct))\big) + \frac{1}{4c}\big((x+ct)^2 - (x-ct)^2\big) \\ &= -c^2t^2 + tx - x^2 + x. \end{aligned}$$

1.6.2 Den endimensionelle varmeligning

1.6.2.1 Randbetingelsen $u(0,t) = u(L,t) = 0$

Eksempel 1.6.2.1. Betragt den endimensionelle varmeligning $u_t = c^2 u_{xx}$ på $[0,1]$ med begyndelsesbetingelsen $u(x,0) = f(x)$, hvor f er givet ved $f(x) = x(1-x)$ med randbetingelsen $u(0,t) = u(L,t) = 0$. Idet $L = 1$, er løsningen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)\sin\Big(\frac{n\pi}{1}x\Big)e^{-\lambda_n^2 t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3}\sin(n\pi x)e^{-\lambda_n^2 t},$$

hvor $\lambda_n = \frac{cn\pi}{1}$ og $b_n(f)$'erne er udregnet i Eksempel 1.5.5.2.

1.6.2.2 Isolerede endepunkter

Eksempel 1.6.2.2. Betragt den endimensionelle varmeligning $u_t = c^2 u_{xx}$ på $[0,1]$ med begyndelsesbetingelsen $u(x,0) = f(x)$, hvor f er givet ved $f(x) = x(1-x)$ med randbetingelsen $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$. Idet $L = 1$, er løsningen

$$u(x,t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos\Big(\frac{n\pi}{1}x\Big)e^{-\lambda_n^2 t} = \frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1+(-1)^n)}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)e^{-\lambda_n^2 t},$$

hvor $\lambda_n = \frac{cn\pi}{1}$ og $a_0(f)$ og $a_n(f)$'erne er udregnet i Eksempel 1.5.5.2.

2 Numeriske metoder

2.1 Løsning af ligninger

2.1.1 Fikspunktiteration

Eksempel 2.1.1.1. Lad $g(x) = (x+10)^{\frac{1}{4}}$. Vi ønsker at finde en numerisk løsning til $g(x) = x$ vha. fikspunktiteration. En skitse viser, at der er en løsning omkring $x = 2$. Vi undersøger nu, om fikspunktiteration kan bruges. Først differentieres g:

$$g'(x) = \frac{1}{4}(x+10)^{-\frac{3}{4}},$$

og da

$$|g'(x)| = \left|\tfrac{1}{4}(x+10)^{-\frac{3}{4}}\right| \leq \tfrac{1}{4} < 1 \quad \text{for} \quad x \geq -9$$

ved vi, at fikspunktiteration kan bruges, hvis vi vælger $x_0 \geq -9$. For eksempelvis $x_0 = 1$, 2 hhv. 4 fås:

x_0	1	2	4
x_1	1,821160287	1,861209718	1,934336420
x_2	1,854236076	1,855804597	1,858658358
x_3	1,855531763	1,855593140	1,855704793
x_4	1,855582464	1,855584866	1,855589234
x_5	1,855584448	1,855584542	1,855584713
x_6	1,855584525	1,855584529	1,855584536
x_7	1,855584529	1,855584529	1,855584529

2.1.2 Newtons metode

Eksempel 2.1.2.1. Lad $g(x) = (x+10)^{\frac{1}{4}}$. Vi ønsker at finde en numerisk løsning til $g(x) = x$ vha. Newtons metode. En skitse viser, at der er en løsning omkring $x = 2$. For at kunne bruge Newtons metode, skal vi først omformulere problemet til noget på formen $f(x) = 0$. Dette kan eksempelvis gøres ved at lade

$$f(x) = g(x) - x.$$

Med dette valg giver Newtons metode med eksempelvis $x_0 = 1$, 2 hhv. 4 følgende resultat.

x_0	1	2	4
x_1	1,856615613	1,855611006	1,86043206
x_2	1,855584530	1,855584529	1,855584559
x_3	1,855584529	1,855584529	1,855584529

Undervejs har vi skullet bruge $f'(x) = \frac{1}{4}(x+10)^{-\frac{3}{4}} - 1$.

2.1.3 Sekantmetoden

Eksempel 2.1.3.1. Vi fortsætter med $g(x) = (x+10)^{\frac{1}{4}}$, og vil stadig gerne finde en numerisk løsning til $g(x) = x$, denne gang vha. sekantmetoden. En skitse viser, at der er en løsning omkring $x = 2$. For at kunne bruge sekantmetoden, skal vi først omformulere problemet til noget på formen $f(x) = 0$. Dette kan eksempelvis gøres ved at lade

$$f(x) = g(x) - x.$$

Med dette valg giver sekant metoden med eksempelvis $x_0 = 1$ og $x_1 = 2$, 2 og 3 hhv. 4 og 5 følgende resultat.

x_0	1	2	4
x_1	2	3	5
x_2	1,855419345	1,855784444	1,862399204
x_3	1,855584498	1,855584807	1,855608418
x_4	1,855584529	1,855584529	1,855584529

Bemærk, at vi ved denne metode ikke behøver udregne $f'(x)$.

2.2 Interpolationspolynomier

2.2.1 Polynomium gennem $n+1$ punkter

2.2.1.1 Lagrange-interpolation

Eksempel 2.2.1.1. Lad $(3, 221)$, $(6, 210)$ og $(36, 105)$ være tre punkter i planen. Vi ønsker at finde et andengradspolynomium som går gennem disse tre punkter. Lad $x_0 = 3$, $x_1 = 6$ og $x_2 = 36$ samt $y_0 = 221$, $y_1 = 210$ og $y_2 = 105$. Så er

$$\ell_0(x) = (x-6)(x-36), \quad \ell_1(x) = (x-3)(x-36) \quad \text{og} \quad \ell_2(x) = (x-3)(x-6),$$

og dermed er

$$L_0(x) = \frac{\ell_0(x)}{\ell_0(x_0)} = \frac{(x-6)(x-36)}{(3-6)(3-36)},$$
$$L_1(x) = \frac{\ell_1(x)}{\ell_1(x_1)} = \frac{(x-3)(x-36)}{(6-3)(6-36)},$$

og

$$L_2(x) = \frac{\ell_2(x)}{\ell_2(x_2)} = \frac{(x-3)(x-6)}{(36-3)(36-6)}.$$

Altså er

$$\begin{aligned} p_2(x) &= 221L_0(x) + 210L_1(x) + 105L_2(x) \\ &= \frac{221}{99}(x-6)(x-36) - \frac{210}{90}(x-3)(x-36) + \frac{105}{990}(x-3)(x-6) \end{aligned}$$

det søgte polynomium. Læg i øvrigt mærke til, at dette polynomium er det samme som det p_2, der findes i Eksempel 2.2.1.2, selvom det ikke umiddelbart ser sådan ud.

2.2.1.2 Newtons divideret differens-metode

Eksempel 2.2.1.2. Lad $(3, 221)$ og $(36, 105)$ være to punkter i planen. Vi ønsker at finde et førstegradspolynomium som går gennem disse to punkter. Lad $x_0 = 3$ og $x_1 = 36$ samt $y_0 = 221$ og $y_1 = 105$. Så er

$$f[x_0] = f[3] = 221, \quad f[x_1] = f[36] = 105$$

og

$$f[x_0, x_1] = f[3, 36] = \frac{f[36] - f[3]}{36 - 3} = -\frac{116}{33}.$$

Dermed er

$$p_1(x) = f[3] + f[36](x-3) = 221 - \frac{116}{33}(x-3)$$

det ønskede førstegradspolynomium.

Antag nu, at vi får et yderligere punkt i planen: $(6, 210)$. Vi vil nu finde et andengradspolynomium p_2, der går gennem de tre punkter. Vi har allerede et førstegradspolynomium, p_1, som går gennem to af punkterne. Sæt $x_2 = 6$ og $y_2 = 210$. Så er

$$f[x_2] = f[6] = 210, \quad f[x_1, x_2] = f[36, 6] = \frac{f[6] - f[36]}{6 - 36} = \frac{210 - 105}{-30} = -\frac{105}{30} = -\frac{7}{2}$$

og

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[3, 36, 6] = \frac{f[36, 6] - f[3, 36]}{6 - 3} = \frac{-\frac{7}{2} - (-\frac{116}{33})}{3} = \frac{1}{198}.$$

Dermed er

$$p_2(x) = p_1(x) + g_2(x) = 221 - \frac{116}{33}(x-3) + \frac{1}{198}(x-3)(x-36)$$

det ønskede andengradspolynomium. Læg i øvrigt mærke til, at dette polynomium er det samme som det p_2, der findes i Eksempel 2.2.1.1, selvom det ikke umiddelbart ser sådan ud.

2.2.2 Polynomiumsapproksimation af funktioner

Eksempel 2.2.2.1. Betragt den naturlige logaritme, $\ln\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Antag, at vi kender $\ln(9{,}0)$ og $\ln(9{,}5)$. Så er

$$p_1(x) = \ln(9{,}0)\tfrac{(x-9{,}5)(x-11{,}0)}{(9{,}0-9{,}5)(9{,}0-11{,}0)} + \ln(9{,}5)\tfrac{(x-9{,}0)(x-11{,}0)}{(9{,}5-9{,}0)(9{,}5-11{,}0)}$$

en polynomiumsapproksimation af $\ln$ og $p_1(9{,}2) = 2{,}21885\ldots$ er en approksimation af $\ln(9{,}2)$ som er fundet ved interpolation. Der findes et $t_{9,2}$ så fejlen $\varepsilon_1(9{,}2) = \ln(9{,}2) - p_1(9{,}2)$ kan skrives

$$\varepsilon_1(9{,}2) = (9{,}2 - 9{,}0)(9{,}2 - 9{,}5)\frac{\ln''(t_{9,2})}{2!}.$$

Vi vil finde en øvre og nedre grænse for fejlen. Først finder vi $\ln''$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{så} \qquad \ln''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

På intervallet $[x_0, x_1] = [9{,}0; 9{,}5]$ antager $\ln''$ altså sin minimale og sin maksimale værdi i hhv. $9{,}0$ og $9{,}5$. Derfor må

$$(9{,}2 - 9{,}0)(9{,}2 - 9{,}5)\frac{-\frac{1}{9{,}0^2}}{2} = 0{,}00033\ldots \leq \varepsilon_1(9{,}2) \leq 0{,}00037\ldots = (9{,}2 - 9{,}0)(9{,}2 - 9{,}5)\frac{-\frac{1}{9{,}5^2}}{2}.$$

Den korrekte fejl viser sig at være $\varepsilon_1(9{,}2) = 0{,}00035\ldots$, og vi får således et godt indtryk af fejlen med vores vurdering.

2.3 Numerisk integration

2.3.1 Midtpunktsreglen

Eksempel 2.3.1.1. Lad $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = e^x$. Sæt $n = 4$, $h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$, $x_0 = 0$, og $x_i = x_0 + ih$, så $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$ og $x_4 = 1$. Så er

$$J_4^m = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} f(x_i - \tfrac{h}{2}) = \frac{1}{4}(e^{\frac{1}{8}} + e^{\frac{3}{8}} + e^{\frac{5}{8}} + e^{\frac{7}{8}})$$

en approksimation af $\int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x$.

2.3.2 Trapezreglen

Eksempel 2.3.2.1. Lad $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = e^x$. Sæt $n = 4$, $h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$, $x_0 = 0$, og $x_i = x_0 + ih$, så $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$ og $x_4 = 1$. Så er

$$J_4^t = \frac{h}{2}\big(f(x_0) + f(x_4)\big) + h\sum_{i=1}^{4-1} f(x_i) = \frac{1}{8}(e^0 + e^1) + \frac{1}{4}(e^{\frac{1}{4}} + e^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{3}{4}})$$

en approksimation af $\int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x$. Da f er to gange differentiabel, så findes et $x_t \in [0,1]$ så

$$\varepsilon_4^t = -\frac{1-0}{12}\frac{1}{4^2} f''(x_t),$$

hvor $\varepsilon_4^t = \int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x - J_4^t$ er fejlen i approksimationen. Da $f''(x) = e^x$ og $1 \le e^x \le e$ for $x \in [0,1]$, så kan vi altså se at fejlen ligger mellem $-\frac{e}{192}$ og $-\frac{1}{192}$. Da $4 = 2 \cdot 2$ er et lige tal kan fejlen approksimeres vha. følgende formel:

$$\varepsilon_4^t \approx \frac{1}{3}(J_4^t - J_2^t).$$

Da $J_2^t = \frac{1}{4}(e^0 + e^1) + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$, kan vi estimere fejlen til $\frac{1}{3}(J_4^t - J_2^t) = \frac{1}{3}(-\frac{1}{8}(1+e) + \frac{1}{4}(e^{\frac{1}{4}} - e^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{3}{4}})) \approx -\frac{1{,}71}{192}$.

2.3.3 Simpsons regel

Eksempel 2.3.3.1. Lad $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = e^x$. Sæt $n = 4$, $h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$, $x_0 = 0$, og $x_i = x_0 + ih$, så $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$ og $x_4 = 1$. Så er

$$\begin{aligned} J_4^S &= \frac{h}{6}\big(f(x_0) + f(x_4)\big) + \frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{4} f(x_i - \tfrac{h}{2}) + \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{4-1} f(x_i) \\ &= \frac{1}{24}(e^0 + e^1) + \frac{1}{6}(e^{\frac{1}{8}} + e^{\frac{3}{8}} + e^{\frac{5}{8}} + e^{\frac{7}{8}}) + \frac{1}{12}(e^{\frac{1}{4}} + e^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{3}{4}}) \end{aligned}$$

en approksimation af $\int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x$. Da f er fire gange differentiabel, så findes et $x_S \in [0,1]$ så

$$\varepsilon_4^S = -\frac{1-0}{2880}\frac{1}{4^4} f^{(4)}(x_S),$$

hvor $\varepsilon_4^S = \int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x - J_4^S$ er fejlen i approksimationen. Da $f^{(4)}(x) = e^x$ og $1 \leq e^x \leq e$ for $x \in [0,1]$, så kan vi altså se at fejlen ligger mellem $-\frac{e}{2880 \cdot 4^4}$ og $-\frac{1}{2880 \cdot 4^4}$. Da $4 = 2 \cdot 2$ er et lige tal kan fejlen approksimeres vha. følgende formel:

$$\varepsilon_4^S \approx \frac{1}{15}(J_4^S - J_2^S).$$

Da $J_2^S = \frac{1}{12}(e^0 + e^1) + \frac{1}{3}(e^{\frac{1}{4}} + e^{\frac{3}{4}}) + \frac{1}{6}e^{\frac{1}{2}}$, kan vi estimere fejlen. Den eksakte værdi overlades det til læseren at finde.

2.3.4 Gauss-kvadratur

Eksempel 2.3.4.1. Lad $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = e^x$. Så er

$$\begin{aligned} J_4^G &= \frac{1-0}{2} \sum_{i=1}^{4} w_i f\left(\tfrac{1-0}{2} z_i + \tfrac{0+1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \Bigg(\tfrac{18+\sqrt{30}}{36} e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}} + \frac{1}{2}\right)} + \tfrac{18+\sqrt{30}}{36} e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}} + \frac{1}{2}\right)} \\ &\quad + \tfrac{18-\sqrt{30}}{36} e^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3+2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}} + \frac{1}{2}\right)} + \tfrac{18-\sqrt{30}}{36} e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3+2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}} + \frac{1}{2}\right)} \Bigg) \end{aligned}$$

en approksimation af $\int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x$.

2.4 Enkeltskridtsmetoder til numerisk løsning af ODE'er af første orden

2.4.1 Euler-metoden

Eksempel 2.4.1.1. Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$y'(x) = e^{-x} - e^{-y(x)}, \qquad \text{hvor} \qquad y(1) = 1.$$

Her er altså $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ og $f(x,y) = e^{-x} - e^{-y}$. Lad $h = \frac{1}{10}$ være skridtlængden og sæt $x_n = 1 + \frac{n}{10}$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Så giver Euler-metoden:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + \tfrac{1}{10} \cdot (e^{-1} - e^{-1}) = 1, \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) = 1 + \tfrac{1}{10} \cdot (e^{-1{,}1} - e^{-1}) = 0{,}996499\ldots, \\ y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) = 0{,}996499\ldots + \tfrac{1}{10} \cdot (e^{-1{,}2} - e^{0{,}996499\ldots}) = 0{,}989702\ldots \end{aligned}$$

osv.

2.4.2 Heuns metode

Eksempel 2.4.2.1. Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$y'(x) = e^{-x} - e^{-y(x)}, \qquad \text{hvor} \qquad y(1) = 1.$$

Her er altså $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ og $f(x, y) = e^{-x} - e^{-y}$. Lad $h = \frac{1}{10}$ være skridtlængden og sæt $x_n = 1 + \frac{n}{10}$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Så giver Heuns metode:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + \tfrac{1}{10} \cdot (e^{-1} - e^{-1}) = 1,\\
y_1 &= y_0 + \tfrac{h}{2}\big(f(x_0, y_0) + f(x_1, \tilde{y}_1)\big) = 1 + \tfrac{1}{20}\big((e^{-1} - e^{-1}) + (e^{-1,1} - e^{-1})\big) = 0{,}998250\ldots,
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) = 0{,}998250\ldots + \tfrac{1}{10} \cdot (e^{-1,1} - e^{-0,998250\ldots}) = 0{,}994684\ldots,\\
y_2 &= y_1 + \tfrac{h}{2}\big(f(x_1, y_1) + f(x_2, \tilde{y}_2)\big)\\
&= 0{,}998250\ldots + \tfrac{1}{20} \cdot \big((e^{-1,1} - e^{-0,998250\ldots}) + (e^{-1,2} - e^{-0,994648\ldots})\big)\\
&= 0{,}993035\ldots
\end{aligned}$$

osv.

2.4.3 RK4-metoden

Eksempel 2.4.3.1. Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$y'(x) = e^{-x} - e^{-y(x)}, \qquad \text{hvor} \qquad y(1) = 1.$$

Her er altså $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ og $f(x, y) = e^{-x} - e^{-y}$. Lad $h = \frac{1}{10}$ være skridtlængden og sæt $x_n = 1 + \frac{n}{10}$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Så giver RK4-metoden:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \tfrac{1}{10} \cdot (e^{-1} - e^{-1}) = 0,\\
k_2 &= \tfrac{1}{10} \cdot (e^{-1,05} - e^{-1}) = -0{,}00179417\ldots,\\
k_3 &= \tfrac{1}{10} \cdot (e^{-1,05} - e^{-(1-0,00179417/2)}) = -0{,}00182719\ldots,\\
k_4 &= \tfrac{1}{10} \cdot (e^{-1,1} - e^{-(1-0,00182719\ldots)} = -0{,}00356812\ldots,
\end{aligned}$$

og dermed

$$y_1 = 1 + \tfrac{1}{6}(0 - 2 \cdot 0{,}00179417\ldots - 2 \cdot 0{,}00182719\ldots - 0{,}00356812\ldots) = 0{,}998198\ldots,$$

og dernæst

$$\begin{aligned}
k_1 &= \tfrac{1}{10} \cdot (e^{-1,1} - e^{-0,998198\ldots}) = -0{,}00356718\ldots\\
k_2 &= \tfrac{1}{10} \cdot (e^{-1,15} - e^{-(0,998198\ldots-0,00356718\ldots/2)}) = -0{,}00519431\ldots\\
k_3 &= \tfrac{1}{10} \cdot (e^{-1,15} - e^{-(0,998198\ldots-0,005194\ldots/2)}) = -0{,}00519431\ldots\\
k_4 &= \tfrac{1}{10} \cdot (e^{-1,2} - e^{-(0,998198\ldots-0,00519431\ldots)}) = -0{,}00693025\ldots
\end{aligned}$$

og dermed

$$\begin{aligned}
y_2 &= 0{,}998198\ldots + \tfrac{1}{6}(-0{,}00356718\ldots - 2 \cdot 0{,}00519431\ldots - 2 \cdot -0{,}00519431\ldots - 0{,}00693025\ldots)\\
&= 0{,}992934\ldots
\end{aligned}$$

osv.

Hvis vi vil indikere, at vi har foretaget udregningerne med $h = \frac{1}{10}$, kan vi eksempelvis skrive $y_n^{\frac{1}{10}}$ osv. Havde vi foretaget ovenstående beregninger for $h = \frac{1}{5}$, så havde vi fået $y_1^{\frac{1}{5}} = 0{,}995295\ldots$. Da $\frac{1}{5} = 2 \cdot \frac{1}{10}$ og $2 = 2 \cdot 1$, kan vi med disse værdier estimere fejlen $\varepsilon_2^{\frac{1}{10}}$ på $y_2^{\frac{1}{10}} = 0{,}992934\ldots$:

$$\varepsilon_2^{\frac{1}{10}} \approx \tfrac{1}{15}(0{,}992934\ldots - 0{,}995295\ldots) = -0{,}000157415\ldots.$$

2.4.4 Runge-Kutta-Fehlberg

Eksempel 2.4.4.1. Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$y'(x) = e^{-x} - e^{-y(x)}, \qquad \text{hvor} \qquad y(1) = 1.$$

Her er altså $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ og $f(x,y) = e^{-x} - e^{-y}$. Lad $h = \frac{1}{10}$ være skridtlængden og sæt $x_n = 1 + \frac{n}{10}$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Så giver Runge-Kutta-Fehlberg-metoden:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \tfrac{1}{10} \cdot (e^{-1} - e^{-1}) = 0,\\
k_2 &= hf(x_n + \tfrac{1}{4}h, y_n + \tfrac{1}{4}k_1) = -0{,}000908298\ldots,\\
k_3 &= hf(x_n + \tfrac{3}{8}h, y_n + \tfrac{3}{32}k_1 + \tfrac{9}{32}k_2) = -0{,}00136340\ldots,\\
k_4 &= hf(x_n + \tfrac{12}{13}, y_n + \tfrac{1932}{2197}k_1 - \tfrac{7200}{2197}k_2 + \tfrac{7296}{2197}k_3) = -0{,}00330090\ldots,\\
k_5 &= hf(x_n + h, y_n + \tfrac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \tfrac{3680}{513}k_3 - \tfrac{845}{4104}k_4) = -0{,}00356838\ldots
\end{aligned}$$

og

$$k_6 = hf(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n - \tfrac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \tfrac{3544}{2565}k_3 + \tfrac{1859}{4104}k_4 - \tfrac{11}{40}k_5) = -0{,}00181061\ldots,$$

og dermed

$$y_1 = 0{,}998198\ldots \quad \text{og} \quad \tilde{y}_1 = 0{,}998198\ldots.$$

Disse to tal ser umiddelbart ens ud, men er det ikke helt. Mere præcist kan vi estimere fejlen ε_1 på y_1 ved

$$\varepsilon_1 \approx y_1 - \tilde{y}_1 = 0{,}000000000318415\ldots.$$

2.4.5 Baglæns Euler

Eksempel 2.4.5.1. Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$y'(x) = f(x,y(x)) = -20y(x) + 20x^2 + 2x \qquad \text{hvor} \qquad y(0) = 1.$$

Det har løsningen $y(x) = e^{-20x} + x^2$ (sæt ind og tjek). Vi vil vise, hvordan man kan løse problemet vha. den baglæns Euler-metode.

Med udgangspunkt i

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1},y_{n+1}) = y_n + h(-20y_{n+1} + 20x_{n+1}^2 + 2x_{n+1})$$

fås

$$y_{n+1} = \frac{y_n + 20hx_{n+1}^2 + 2hx_{n+1}}{1+20h} = \frac{y_n + 20h(x_n+h)^2 + 2h(x_n+h)}{1+20h},$$

og vi kan således iterere på sædvanlig vis.

2.5 Mangeskridtsmetoder til numerisk løsning af ODE'er af første orden

2.5.1 Adams-Bashforth-metoder

Eksempel 2.5.1.1. Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$y'(x) = e^{-x} - e^{-y(x)}, \qquad \text{hvor} \qquad y(1) = 1.$$

Her er altså $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ og $f(x,y) = e^{-x} - e^{-y}$. Lad $h = \frac{1}{10}$ være skridtlængden og sæt $x_n = 1 + \frac{n}{10}$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Antag, at vi kender (eller har estimeret) $y_1 = 0{,}998198\ldots$, $y_2 = 0{,}992933\ldots$ og $y_3 = 0{,}984398\ldots$. Så giver Adams-Bashforth-metoden:

$$\begin{aligned}
y_4 &= y_3 + \tfrac{h}{24}\big(55f(x_3,y_3) - 59f(x_2,y_2) + 37f(x_1,y_1) - 9f(x_0,y_0)\big)\\
&= 0{,}984398\ldots + \tfrac{1}{240}\Big(55\cdot(e^{-1,3} - e^{-0,984398\ldots}) - 59\cdot(e^{-1,2} - e^{-0,992933\ldots})\\
&\qquad + 37\cdot(e^{1,1} - e^{-0,998198\ldots}) - 9\cdot(e^{-1} - e^{-1})\Big) = 0{,}972758\ldots,\\
y_5 &= y_4 + \tfrac{h}{24}(55f(x_4,y_4) - 59f(x_3,y_3) + 37f(x_2,y_2) - 9f(x_1,y_1)) = 0{,}958153\ldots,\\
y_6 &= y_5 + \tfrac{h}{24}(55f(x_5,y_5) - 59f(x_4,y_4) + 37f(x_3,y_3) - 9f(x_2,y_2)) = 0{,}940698\ldots,\\
y_7 &= y_6 + \tfrac{h}{24}(55f(x_6,y_6) - 59f(x_5,y_5) + 37f(x_4,y_4) - 9f(x_3,y_3)) = 0{,}920487\ldots,
\end{aligned}$$

osv.

2.5.2 Adams-Moulton-metoder

Eksempel 2.5.2.1. Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$y'(x) = e^{-x} - e^{-y(x)}, \qquad \text{hvor} \qquad y(1) = 1.$$

Her er altså $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ og $f(x,y) = e^{-x} - e^{-y}$. Lad $h = \frac{1}{10}$ være skridtlængden og sæt $x_n = 1 + \frac{n}{10}$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Antag, at vi kender (eller har estimeret) $y_1 = 0{,}998198\ldots$, $y_2 = 0{,}992933\ldots$ og $y_3 = 0{,}984398\ldots$. I Adams-Moulton-metoden skal vi først finde en *prædiktor*, $\tilde{y}_4$, for y_4, så vi kan estimere $f(x_4, y_4)$. Til dette formål benyttes Adams-Bashforth-metoden. Da $\tilde{y}_4$ kun afhænger af de allerede kendte værdier, y_3, y_2, y_1 og y_0, så fås samme resultat som i Eksempel 2.5.1.1:

$$\tilde{y}_4 = 0{,}972758\ldots.$$

Vi kan nu udregne

$$\begin{aligned}
y_4 &= y_3 + \tfrac{h}{24}\big(9f(x_4,\tilde{y}_4) + 19f(x_3,y_3) - 5f(x_2,y_2) + f(x_1,y_1)\big)\\
&= 0{,}984398\ldots + \tfrac{1}{240}\Big(9\cdot(e^{1,4} - e^{-0,972758\ldots}) + 19\cdot(e^{-1,3} - e^{-0,984398\ldots})\\
&\qquad - 5\cdot(e^{-1,2} - e^{-0,992933\ldots}) + (e^{1,1} - e^{-0,998198\ldots})\Big) = 0{,}972759\ldots,
\end{aligned}$$

og fejlen ε_4 kan estimeres ved $\varepsilon_4 \approx \frac{1}{15}(y_4 - \tilde{y}_4) = 0{,}0000000246757\ldots$. Skulle man mene, at denne fejl er for stor, kan man erstatte $\tilde{y}_4$ med $y_4 = 0{,}972759\ldots$ og gentage processen med den nye $\tilde{y}_4$. Man vil så få en ny y_4 og kan igen estimere fejlen osv. Vi vælger dog at acceptere y_4, som den er.

For at udregne y_5 skal vi bruge $\tilde{y}_5$, men $\tilde{y}_5$ kan vi ikke længere tage fra Eksempel 2.5.1.1, da vores nye y_4 afviger (en smule) fra $\tilde{y}_4$, som jo blev brugt i Eksempel 2.5.1.1. Altså skal vi udregne:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_5 &= y_4 + \tfrac{h}{24}\big(55f(x_4,y_4) - 59f(x_3,y_3) + 37f(x_2,y_2) - 9f(x_1,y_1)\big)\\ &= 0{,}972759\ldots + \tfrac{1}{240}\Big(55\cdot(e^{1{,}4} - e^{-0{,}972759\ldots}) - 59\cdot(e^{-1{,}3} - e^{-0{,}984398\ldots})\\ &\qquad + 37\cdot(e^{-1{,}2} - e^{-0{,}992933\ldots}) - 9\cdot(e^{1{,}1} - e^{-0{,}998198\ldots})\Big) = 0{,}958153\ldots.\end{aligned}$$

Nu kan y_5 udregnes:

$$y_5 = y_4 + \tfrac{h}{24}\big(9f(x_5,\tilde{y}_5) + 19f(x_4,y_4) - 5f(x_3,y_3) + f(x_2,y_2)\big) = 0{,}958153\ldots,$$

hvor vi igen kan estimere fejlen: $\varepsilon_5 \approx \frac{1}{15}(y_5 - \tilde{y}_5) = 0{,}0000000211801\ldots$. Antag nu for eksemplets skyld, at vi er utilfredse med denne fejl. Lad $y_5^{\text{gammel}} = y_5$ og definér

$$y_5^{\text{ny}} = y_4 + \tfrac{h}{24}\big(9f(x_5,y_5^{\text{gammel}}) + 19f(x_4,y_4) - 5f(x_3,y_3) + f(x_2,y_2)\big) = 0{,}958153\ldots.$$

Vi kan nu estimere fejlen på y_5^{ny}: $\varepsilon_5^{\text{ny}} \approx \frac{1}{15}(y_5^{\text{ny}} - y_5^{\text{gammel}}) = 0{,}000000000349813\ldots$, som altså er en klar forbedring. Hvis man stadig ikke er tilfreds, kan man naturligvis gentage processen.

2.6 Metoder til førsteordenssystemer

2.6.1 Euler-metoden

Eksempel 2.6.1.1. Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_1(0) &= 3,\\ y_2' &= -2y_2 - 0{,}75y_1, & y_2(0) &= -2{,}5. \end{aligned}$$

Dette er et system på formen

$$Y'(x) = F(x, Y(x)) \qquad \text{med} \qquad Y(x_0) = Y_0,$$

hvor $x_0 = 0$, $Y_0 = \binom{3}{-2{,}5}$, $Y(x) = \binom{y_1(x)}{y_2(x)}$ og $F(x,Y) = \binom{y_2}{-2y_2 - 0{,}75y_1}$ for $Y = \binom{y_1}{y_2}$.

Euler-metoden svarer så til iteration i følgende system:

$$\begin{aligned} y_{1,n+1} &= y_{1,n} + hy_{2,n}, & y_{1,0} &= 3,\\ y_{2,n+1} &= y_{2,n} + h(-2y_{2,n} - 0.75y_{1,n}), & y_{2,0} &= -2{,}5. \end{aligned}$$

hvor $x_n = x_0 + nh = nh$.

2.6.2 RK4

Eksempel 2.6.2.1. Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_1(0) &= 3,\\ y_2' &= -2y_2 - 0{,}75y_1, & y_2(0) &= -2{,}5. \end{aligned}$$

Dette er et system på formen

$$Y'(x) = F(x, Y(x)) \qquad \text{med} \qquad Y(x_0) = Y_0,$$

hvor $x_0 = 0$, $Y_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$, $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ og $F(x,Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -2y_2 - 0{,}75y_1 \end{pmatrix}$ for $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

RK4-metoden svarer så til iteration i følgende system:

$$\begin{aligned} y_{1,n+1} &= y_{1,n} + \tfrac{1}{6}(K_{1,1} + 2K_{1,2} + 2K_{1,3} + K_{1,4}), & y_{1,0} &= 3, \\ y_{2,n+1} &= y_{2,n} + \tfrac{1}{6}(K_{1,1} + 2K_{1,2} + 2K_{1,3} + K_{1,4}), & y_{2,0} &= -2{,}5. \end{aligned}$$

hvor

$$\begin{aligned} K_{1,1} &= hy_{2,n}, & K_{2,1} &= h(-2y_{2,n} - 0{,}75y_{1,n}), \\ K_{1,2} &= h(y_{2,n} + \tfrac{1}{2}K_{1,1}), & K_{2,2} &= h\big(-2(y_{2,n} + \tfrac{1}{2}K_{2,1}) - 0{,}75(y_{1,n} + \tfrac{1}{2}K_{1,1})\big), \\ K_{1,3} &= h(y_{2,n} + \tfrac{1}{2}K_{1,2}), & K_{2,3} &= h\big(-2(y_{2,n} + \tfrac{1}{2}K_{2,2}) - 0{,}75(y_{1,n} + \tfrac{1}{2}K_{1,2})\big), \\ K_{1,4} &= h(y_{2,n} + K_{1,3}), & K_{2,4} &= h\big(-2(y_{2,n} + K_{2,3}) - 0{,}75(y_{1,n} + K_{1,3})\big) \end{aligned}$$

og $x_n = x_0 + nh = nh$.

2.6.3 Baglæns Euler

Eksempel 2.6.3.1. Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x), & y_1(0) &= 2, \\ y_2'(x) &= -10y_1(x) - 11y_2(x) + 10x + 11, & y_2(0) &= -10. \end{aligned}$$

Dette system er på formen

$$Y'(x) = F(x, Y(x)), \qquad \text{med} \qquad Y(x_0) = Y_0,$$

hvor $x_0 = 0$, , $Y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}$, $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ og $F(x,Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -10y_1 - 11y_2 + 10x + 11 \end{pmatrix}$ for $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, og det viser sig, at F er så tilpas simpel, at Y_{n+1} kan isoleres i udtrykket

$$Y_{n+1} = Y_n + hF(x_{n+1}, Y_{n+1}).$$

Baglæns Euler giver nu

$$\begin{aligned} y_{1,n+1} &= y_{1,n} + hy_{2,n+1}, & y_{1,0} &= 2, \\ y_{2,n+1} &= y_{2,n} + h(-10y_{1,n+1} - 11y_{2,n+1} + 10x_{n+1} + 11), & y_{2,0} &= -10. \end{aligned}$$

Løses ligningssystemet for $y_{1,n+1}$ og $y_{2,n+1}$ (med $x_{n+1} = x_n + h$) fås

$$\begin{aligned} y_{1,n+1} &= \frac{1}{1 + 11h + 10h^2}\big((1 + 11h)y_{1,n} + hy_{2,n} + 10h^2x_n + 11h^2 + 10h^3\big), \\ y_{2,n+1} &= \frac{1}{1 + 11h + 10h^2}\big(-10hy_{1,n} + y_{2,n} + 10hx_n + 11h + 10h^2\big). \end{aligned}$$

2.7 Metoder til numerisk løsning af ODE'er af anden orden

2.7.1 Runge-Kutta-Nyström-metoder

2.7.1.1 $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$

Eksempel 2.7.1.1. Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$y''(x) = x(y(x) - y'(x)), \qquad \text{hvor} \qquad y(1) = 1 \quad \text{og} \quad y'(1) = 0.$$

Lad $h = \frac{1}{10}$ være skridtlængden og sæt $x_n = 1 + nh$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Definér y_n og y'_n for $n = 0, 1, 2, \ldots$, rekursivt ved $y_0 = 1$ og $y'_0 = 0$ samt

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{10}(y'_n + \tfrac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3))$$

og

$$y'_{n+1} = y'_n + \tfrac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

hvor

$$k_1 = \tfrac{1}{20}x_n(y_n - y'_n), \qquad k = \tfrac{1}{20}(y'_n + \tfrac{1}{2}k_1),$$
$$k_2 = \tfrac{1}{20}(x_n + \tfrac{1}{20})\big((y_n + k) - (y'_n + k_1)\big),$$
$$k_3 = \tfrac{1}{20}(x_n + \tfrac{1}{20})\big((y_n + k) - (y'_n + k_2)\big), \qquad l = \tfrac{1}{10}(y'_n + k_3)$$

og

$$k_4 = \tfrac{1}{20}(x_n + \tfrac{1}{10})\big((y_n + l) - (y'_n + 2k_3)\big).$$

2.7.1.2 $y''(x) = f(x, y(x))$

Eksempel 2.7.1.2. Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$y''(x) = xy(x), \qquad \text{hvor} \qquad y(0) = 1 \quad \text{og} \quad y'(0) = -1.$$

Lad $h = \frac{1}{10}$ være skridtlængden og sæt $x_n = nh$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Definér y_n og y'_n $n = 0, 1, 2, \ldots$, rekursivt ved $y_0 = 1$ og $y'_0 = -1$ samt

$$\begin{aligned} k_1 &= \tfrac{1}{20}x_n y_n, \\ k_2 &= \tfrac{1}{20}(x_n + \tfrac{1}{20})(y_n + \tfrac{1}{20}(y'_n + \tfrac{1}{2}k_1)) = k_3, \\ k_4 &= \tfrac{1}{20}(x_n + \tfrac{1}{10})(y_n + \tfrac{1}{10}(y'_n + k_2)), \\ y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{10}(y'_n + \tfrac{1}{3}(k_1 + 2k_2)) \end{aligned}$$

og

$$y'_{n+1} = y'_n + \tfrac{1}{3}(k_1 + 4k_2 + k_4).$$

2.8 Numerisk metode til Laplace- og Poisson-ligningerne i to dimensioner

2.8.1 Regulær rand

Kald randen af D for ∂D. Antag, at vi for et passende valg af x_0, y_0 og $h > 0$ har, at ethvert punkt $(x_i, y_j) \in D$ enten er et randpunkt, $(x_i, y_j) \in \partial D$, eller at de fire nabopunkter, (x_{i-1}, y_j), (x_{i+1}, y_j),

(x_i, y_{j-1}) og (x_i, y_{j-1}), også ligger i D, og at h er lille. Så kan vi finde en numerisk løsning til Laplace-ligningen, som opfylder følgende lineære ligningssystem:

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0, \quad \text{for} \quad (i,j) \text{ så } (x_i, y_j) \in D \setminus \partial D, \tag{9}$$

mens der for Poisson-ligningen tilsvarende findes en numerisk løsning, som opfylder følgende lineære ligningsystem:

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = h^2 f(x_i,y_j), \quad \text{for} \quad (i,j) \text{ så } (x_i, y_j) \in D \setminus \partial D. \tag{10}$$

Bemærk i øvrigt, at (9) svarer til (10) med $f \equiv 0$.

2.8.1.1 Dirichlet-randbetingelser

Eksempel 2.8.1.1. Betragt Laplace-ligningen $\nabla^2 u = 0$ på $R = [0, 12] \times [0, 12]$ med randbetingelsen $u(x, y) = 0$ for $y = 12$, $u(x, y) = 100$ for $x = 0$, $y = 0$ eller $x = 12$.[1] Vælg $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ og $h = 4$ og sæt $x_i = x_0 + ih$ og $y_j = y_0 + jh$. Så ligger de 16 punkter $\{(x_i, y_j)\}_{i,j=0}^3$ i R og enten er de randpunkter, eller også har de fire nabopunkter i mængden. Altså er vi i tilfældet "regulær rand," og da værdien er angivet på randen, er der tale om en Dirichlet-randbetingelse. Af de 16 punkter er 12 randpunkter, mens (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1) og (x_2, y_2) ligger indenfor randen, altså

$$(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2) \in R \setminus \partial R.$$

Lad $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ for $(x_i, y_j) \in \partial R$ og opskriv de fire lineære ligninger

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0, \quad \text{for} \quad (i,j) \text{ så } (x_i, y_j) \in D \setminus \partial D,$$

som altså kun består af fire ubekendte, da u som sagt kendes på randen. Dette svarer til systemet

$$\begin{aligned}
-4u_{11} + 100 + 100 + u_{21} + u_{12} &= 0, \\
-4u_{21} + u_{11} + 100 + 100 + u_{22} &= 0, \\
-4u_{12} + 100 + u_{11} + u_{22} + 0 &= 0, \\
-4u_{22} + u_{12} + u_{21} + 100 + 0 &= 0.
\end{aligned}$$

Løsningen til dette ligningssystem vil opfylde, at $u(x_i, y_j) \approx u_{i,j}$.

2.8.1.2 Neumann- og blandede randbetingelser

Eksempel 2.8.1.2. Betragt Poisson-ligningen

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) = 12xy$$

på regionen $R = [0; 1{,}5] \times [0, 1]$ med de blandede randbetingelser $u \equiv 0$ på $L_1 = [0; 1{,}5] \times \{0\}$, $u(x, y) = 3y^3$ på $L_2 = \{1{,}5\} \times [0; 1{,}0]$, $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = 6x$ på $L_3 = [0; 1{,}5] \times \{1{,}0\}$ og igen $u \equiv 0$ på $L_4 = \{0\} \times [0; 1{,}0]$. Vælges $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ og $h = \frac{1}{2}$, og sættes $x_i = x_0 + ih$ og $y_j = y_0 + jh$, så

[1] Der er selvfølgelig problemer med denne randbetingelse i $(0, 12)$ og $(12, 12)$, da disse punkter både falder ind under $y = 12$ og $x = 0$ hhv. $x = 12$. Det ændrer imidlertid ikke på noget andre steder, hvis vi ændrer værdien i disse endeligt mange isolerede punkter.

ligger de 12 punkter i mængden $\{(x_i, y_j)\}_{i,j=0}^{i=3,j=2}$ i R og enten er de randpunkter, eller også har de fire nabopunkter i mængden. Altså er vi i tilfældet "regulær rand," og da det er den afledede, der er angivet på dele af randen, er der tale om en blandet randbetingelse.

Randbetingelserne på L_1 og L_4 giver

$$\begin{aligned} u_{i0} = u_{0j} &= 0 &&\text{for} \quad i = 0{,}1{,}2{,}3, j = 0{,}1{,}2 \\ u_{31} &= 0.375, && u_{32} = 3, \\ \tfrac{\partial u_{12}}{\partial n} = \tfrac{\partial u_{12}}{\partial y} &= 6 \cdot 0.5 = 3, && \tfrac{\partial u_{22}}{\partial n} = \tfrac{\partial u_{22}}{\partial y} = 6 \cdot 1 = 6. \end{aligned}$$

Vi har altså værdier for alle punkter undtagen u_{12} og u_{22}, hvor vi har partielt afledede, samt u_{11} og u_{21}, hvor vi opstiller de to lineære ligninger:

$$\begin{aligned} -4u_{11} + u_{21} + u_{12} &= h^2 f(x_1,y_1) - u_{01} = 0.75, \\ u_{11} - 4u_{21} + u_{22} &= h^2 f(x_2,y_1) - u_{31} = 1.125. \end{aligned} \tag{11}$$

Vi tilføjer to punkter u_{13} og u_{23} udenfor regionen R og opskriver ligningerne

$$\begin{aligned} u_{11} - 4u_{12} + u_{22} + u_{13} &= h^2 f(x_1,y_2) - u_{02} = 1.5, \\ u_{21} + u_{12} - 4u_{22} + u_{23} &= h^2 f(x_2,y_2) - u_{32} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

For at slippe af med de kunstige punkter u_{13} og u_{23} opskriver vi følgende ligninger:

$$3 = \tfrac{\partial u_{12}}{\partial y} = \tfrac{u_{13} - u_{11}}{2h} = u_{13} - u_{11} \qquad \text{og} \qquad 6 = \tfrac{\partial u_{22}}{\partial y} = \tfrac{u_{23} - u_{21}}{2h} = u_{23} - u_{21},$$

eller

$$u_{13} = u_{11} + 3 \qquad \text{og} \qquad u_{23} = u_{21} + 6.$$

sættes disse udtryk ind i (12), fås

$$\begin{aligned} 2u_{11} - 4u_{12} + u_{22} &= h^2 f(x_1,y_2) - u_{02} - 3 = -1.5, \\ 2u_{21} + u_{12} - 4u_{22} &= h^2 f(x_2,y_2) - u_{32} - 6 = -6. \end{aligned} \tag{13}$$

Vi står nu med fire lineære ligninger (11) og (13), med fire ubekendte u_{11}, u_{21}, u_{12} og u_{22}, som vi kan løse med en valgfri metode.

2.8.2 Irregulær rand

2.8.2.1 Dirichlet-randbetingelser

Eksempel 2.8.2.1. Betragt Laplace-ligningen $\nabla^2 u = 0$ på $R = [0, 4] \times [0, 3]$ med randbetingelsen $u(x, y) = 0$ for $x = 0$, $u(x, y) = 1$ for $y = 0$, $u(x, y) = 2$ for $x = 4$ og $u(x, y) = 3$ for $y = 3$.[2] Vælg $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ og $h = 2$, og sæt $x_i = x_0 + ih$ og $y_j = y_0 + jh$. Så er ligger de seks punkter $\{(x_i, y_j)\}_{i,j=0}^{i=2,j=1}$ i R, men punktet $(x_1, y_1) = (2, 2)$ har et nabopunkt, $(x_1, y_2) = (2, 4)$ som *ikke* ligger i R. Altså er vi i tilfældet "irregulær rand." For overskuelighedens skyld har vi valgt et simpelt tilfælde, hvor de fem andre punkter er randpunkter, og vi ender derfor med én ligning med én ubekendt. Metoden er dog den samme i mere komplicerede tilfælde.

[2] Se fodnoten til Eksempel 2.8.1.1.

Da $(x_2, y_1) = (4, 2)$, $(x_0, y_1) = (0, 2)$ og $(x_1, y_0) = (2, 0)$ alle ligger i R, sættes $a = p = q = 1$, og for at få $(x_1, y_B) = (2, 2 + 2b)$, $0 < b < 1$ til at være et randpunkt, vælges $b = \frac{1}{2}$: $(2, 3) \in \partial R$. Vi kan nu opstille ligningen

$$\frac{u_A}{1(1+1)} + \frac{u_B}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)} + \frac{u_P}{1(1+1)} + \frac{u_Q}{1(1+\frac{1}{2})} - \frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} u_{1,1} = 0,$$

hvor randbetingelserne giver, at $u_A = 2$, $u_B = 3$, $u_P = 0$ og $u_Q = 1$.

2.8.3 Gauss-Seidel-iterationsmetoden

Eksempel 2.8.3.1. Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned}
u_{11} - \tfrac{1}{4}u_{21} - \tfrac{1}{4}u_{12} \phantom{- \tfrac{1}{4}u_{22}} &= 50,\\
-\tfrac{1}{4}u_{11} + u_{21} - \tfrac{1}{4}u_{22} &= 50,\\
-\tfrac{1}{4}u_{11} + u_{12} - \tfrac{1}{4}u_{22} &= 25,\\
-\tfrac{1}{4}u_{21} - \tfrac{1}{4}u_{12} + u_{22} &= 25.
\end{aligned}$$

Lad os vælge rækkefølgen $u_{11}, u_{21}, u_{12}, u_{22}$. Så kan ligningssystemet også skrives på formen $Au = b$ for

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad b = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Vi gætter på $u_{i,j}^{(0)} = 100$ for $i, j = 1, 2$. Da diagonalen i A er 1, kan vi droppe faktoren $\frac{1}{a_{i,i}}$. Først sættes

$$\begin{aligned}
u_{11}^{(1)} &= b_1 - a_{12}u_{21}^{(0)} - a_{13}u_{12}^{(0)} - a_{14}u_{22}^{(0)} = 50 + \tfrac{1}{4}\cdot 100 + \tfrac{1}{4}\cdot 100 + 0\cdot 100 = 100,\\
u_{21}^{(1)} &= b_2 - a_{21}u_{11}^{(1)} - a_{23}u_{12}^{(0)} - a_{24}u_{22}^{(0)} = 50 + \tfrac{1}{4}\cdot 100 + 0\cdot 100 + \tfrac{1}{4}\cdot 100 = 100,\\
u_{12}^{(1)} &= b_3 - a_{31}u_{11}^{(1)} - a_{32}u_{21}^{(1)} - a_{34}u_{22}^{(0)} = 25 + \tfrac{1}{4}\cdot 100 + 0\cdot 100 + \tfrac{1}{4}\cdot 100 = 75,\\
u_{22}^{(1)} &= b_4 - a_{41}u_{11}^{(1)} - a_{42}u_{21}^{(1)} - a_{43}u_{12}^{(1)} = 25 + 0\cdot 100 + \tfrac{1}{4}\cdot 100 + \tfrac{1}{4}\cdot 75 = 68{,}75,
\end{aligned}$$

og dernæst

$$\begin{aligned}
u_{11}^{(2)} &= b_1 - a_{12}u_{21}^{(1)} - a_{13}u_{12}^{(1)} - a_{14}u_{22}^{(1)} = 50 + \tfrac{1}{4}\cdot 100 + \tfrac{1}{4}\cdot 75 + 0\cdot 68{,}75 = 93{,}75,\\
u_{21}^{(2)} &= b_2 - a_{21}u_{11}^{(2)} - a_{23}u_{12}^{(1)} - a_{24}u_{22}^{(1)} = 50 + \tfrac{1}{4}\cdot 93{,}75 + 0\cdot 75 + \tfrac{1}{4}\cdot 68{,}75 = 90{,}625\\
u_{12}^{(2)} &= b_3 - a_{31}u_{11}^{(2)} - a_{32}u_{21}^{(2)} - a_{34}u_{22}^{(1)} = 25 + \tfrac{1}{4}\cdot 93{,}75 + 0\cdot 90{,}625 + \tfrac{1}{4}\cdot 68{,}75 = 65{,}625\\
u_{22}^{(2)} &= b_4 - a_{41}u_{11}^{(2)} - a_{42}u_{21}^{(2)} - a_{43}u_{12}^{(2)} = 25 + 0\cdot 93{,}75 + \tfrac{1}{4}\cdot 90{,}625 + \tfrac{1}{4}\cdot 65{,}625 = 64{,}0625,
\end{aligned}$$

og såfremdeles.