Matematisk modellering og numeriske metoder

Lektion 10

Morten Grud Rasmussen

27. oktober 2015

1 Partielle differentialligninger

1.1 Det grundlæggende om PDE'er

[Afsnit 12.1 i bogen, s. 540]

Definition 1.1 (Partielle differentialligninger (PDE'er))**.** En ligning i en ukendt funktion u af flere variable kaldes en *partiel differentialligning (PDE)*, hvis ligningen afhænger af én eller flere partielt afledede af u. Ordenen af den højest partielt afledede kaldes *ordenen* af PDE'en.

Den ukendte funktion vil normal blive betragtet som en funktion af en eller flere rumlige variable og ofte en tidsvariabel. Ligesom det var tilfældet for ODE'er, er de vigtigste PDE'er, som optræder i anvendelser, af anden orden.

Vi minder om, at partiel afledning er lineær i funktionen (dvs. $\frac{\partial cu}{\partial x} = c\frac{\partial u}{\partial x}$ for alle konstanter c, hvis $u = u_1 + u_2$, så er $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x}$, osv.). På denne baggrund er følgende definition naturlig.

Definition 1.2 (Lineære PDE'er, homogenitet)**.** En PDE i variablene $x_1, \ldots x_n$ af orden k kaldes *lineær* hvis den kan bringes på formen

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = r(x_1, \ldots, x_n),$$

hvor F er lineær i alle variable, undtagen de n første, og r er en funktion af de uafhængige variable $x_1, \ldots, x_n$. Hvis en PDE kan bringes på ovenstående form med $r \equiv 0$, så kaldes PDE'en *homogen*. Ellers kaldes den *ikke-homogen*.

Vi bemærker, at i definitionen benyttede vi blot navnene $x_1, \ldots, x_n$ for de uafhængige variable for at have noget at referere til. De behøver således ikke være rumlige variable, og hvis en specifik PDE afhænger af tiden t, så skal denne variable også inkluderes i listen over uafhængige variable og bruges til partielt afledede. Specielt er en lineær PDE af orden to med én rumlig variabel x og én tidsvariabel t på formen:

$$F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = r(x,t),$$

hvor F er lineær i alle variable (evt. undtagen x og t) og r er en funktion. Sådanne PDE'er kaldes ofte *en-dimensionelle* til trods for, at den ukendte funktion afhænger af *to* variable, da den afhænger af én *rumlig* variabel.

Eksempel 1.3. De følgende seks eksempler på andenordens lineære PDE'er er vigtige i mange anvendelser.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{(en-dimensionel bølgeligning)} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{(en-dimensionel varmeligning)} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{(to-dimensionel Laplace-ligning)} \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \qquad \text{(to-dimensionel Poisson-ligning)} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad \text{(to-dimensionel bølgeligning)} \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{(tre-dimensionel Laplace-ligning)} \tag{6}$$

Alle er lineære, alle undtagen Poisson-ligningen (4) er homogene, alle nævnte "dimensioner" er rumlige, bølge- og varmeligningerne (1), (2), (5) afhænger også af tiden t, mens Laplace- og Poisson-ligningerne er rent rumlige og *tidsuafhængige*.

Definition 1.4 (Løsning til en PDE)**.** En *løsning* til en PDE i et åbent domæne R af rummet af uafhængige variable (inkl. den eventuelle tidslige variabel t) er en funktion u, for hvilken alle de partielt afledede, som optræder i PDE'en, eksisterer i et område[1], som indeholder R, således at u opfylder PDE'en i R.

Som med IVP'er i ODE'er, hvor vi behøvede begyndelsesværdibetingelser for at være sikker på, at vores løsning var den rette, skal vi bruge *yderligere betingelser* for PDE'er. Disse er typisk givet ved *randværdier* (løsningen kræves at have bestemte værdier på randen af området R) og/eller (hvis tiden t indgår som en uafhængig variabel) *begyndelsesværdibetingelser* (værdien af u til tiden $t = 0$ og/eller en eller flere af de partielt afledede af u mht. t til tid $t = 0$ kræves at have bestemte værdier).

Disse yderligere betingelser er endog endnu vigtigere for PDE'er end for ODE'er, da den øgede kompleksitet af PDE'er i forhold til ODE'er forstørrer rummet af løsninger dramatisk. En relativt simpel andenordens PDE såsom den todimensionelle Laplace-ligning (3) har eksempelvis følgende meget forskellige løsninger:

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad u(x,y) = e^x \cos(y), \quad u(x,y) = \sin(x)\cosh(y), \quad \text{og} \quad u(x,y) = \ln(x^2 + y^2).$$

[1] et område er en sammenhængende, åben mængde

Da (3) tydeligvis er homogen, så har du sikkert allerede gættet, at linearkombinationer af disse løsninger også er løsninger, som postuleret i følgende sætning:

Sætning 1.5 (Sætning 1 på side 541 i bogen)**.** *Mængden af løsninger til en lineær, homogen PDE i et område R er lukket under linearkombinationer, dvs. hvis u_1 og u_2 er løsninger på R, så er også*

$$u = c_1u_1 + c_2u_2$$

en løsning, for ethvert valg af c_1 og c_2. Løsningsmængden udgør med andre ord et vektorrum.

Beviset for denne påstand er ikke grundlæggende forskellig fra beviset for ODE'er.

Vi vil nu betragte nogle meget simple PDE'er, som kan løses ved ODE-metoder. Men først en kommentar om notation. Det kan være meget trættende at skrive alle disse ∂'er. For at afhjælpe dette, er der opfundet en nemmere notation for partielt afledede. Lad u være en funktion og x en uafhængig variabel. Vi vil nu lade u_x betegne u's partielt afledede mht. x. Da $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ hvis én (og derfor begge) af disse udtryk er kontinuerte, så kan vi benytte denne notationsregel successivt og skrive eksempelvis $u_{xy} = u_{yx}$ eller u_{xx}.

Eksempel 1.6 (Eksempel 2 på side 542 i bogen)**.** Vi betragter PDE'en

$$u_{xx}(x,y) - u(x,y) = 0.$$

Havde det ikke været for y-afhængigheden, så ville det blot være $u'' - u = 0$, og løsningen ville være $u(x) = ae^x + be^{-x}$ for ethvert valg af a og b. Dette betyder, at for ethvert fast valg af y_0, $a = a_{y_0}$ og $b = b_{y_0}$ opfylder funktionen $u(x, y_0) = a_{y_0}e^x + b_{y_0}e^{-x}$ PDE'en (men er ikke en løsning, da mængden $\{(x, y_0) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ ikke er en åben mængde). Dette betyder, at for vilkårlige funktioner $a, b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er

$$u(x,y) = a(y)e^x + b(y)e^{-x}$$

en løsning til PDE'en.

Eksempel 1.7. Vi betragter PDE'en $u_{xy} = -u_x$. Lad nu $p(x,y) = u_x(x,y)$. Så kan PDE'en skrives som

$$p_y = -p. \tag{7}$$

Havde det ikke været for x-afhængigheden, så ville der blot stå $p' = -p$, og løsningen ville have været $p(y) = ce^{-y}$ for enhver konstant c. Dette betyder, at for ethvert fast valg af x_0 og $c = c_{x_0}$ opfylder funktionen f givet ved $f(x_0, y) = c_{x_0}e^{-y}$ (7). Som før betyder dette, at for en vilkårlig funktion $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ opfylder funktionen v givet ved $v(x,y) = c(x)e^{-y}$ (7). For at få u, skal vi blot integrere mht. x:

$$u(x,y) = f(x)e^{-y} + g(y), \qquad \text{hvor} \qquad f = \int c(x)\,\mathrm{d}x,$$

og g er en integrationskonstant, som kan afhænge af y. Da $c(x)$ og $g(y)$ kan vælges frit, så kan f også (så længe, den er differentiabel), og løsningen er blot

$$u(x,y) = f(x)e^{-y} + g(y)$$

for vilkårlige (men differentiable) f og g.

Eftervis løsningerne ovenfor ved direkte udregning.

1.2 Udledning af bølgeligningen

[Afsnit 12.2 i bogen, s. 543]
I det foregående afsnit så vi et par såkaldte bølgeligninger. Vi vil nu udlede den én-dimensionelle bølgeligning som en model for en vibrerende streng. Setuppet er som følger. Vi har en streng langs x-aksen udstrukket til længden L og fikseret i endepunkterne $x = 0$ og $x = L$. strengen forvrides og slippes til tiden $t = 0$, hvorefter den vibrerer frit. Vi vil modellere dens udsving $u(x, t)$ i ethert punkt $x \in [0, L]$ og til enhver tid $t \geq 0$. Som forudsætning for udledningen vil vi gøre følgende antagelser.

1. Strengen har en uniform masse langs x-aksen; vi lader ρ betegne massen per længdeenhed.
2. Strengen er perfekt elastisk og yder ikke modstand mod at blive bøjet.
3. Tyngdekraftens indvirkning på strengen kan negligeres.
4. Hver partikel af strengen bevæger sig kun parallelt med y-aksen, vinkelret på x-aksen, som den en udstrukket langs.

Vi betragter de kræfter, som virker på en lille del af strengen. Lad x være et punkt og $x + \Delta x$ et nærliggende punkt på x-aksen, og lad P og Q betegne endepunkterne af den fordrejne streng mellem x og $x + \Delta x$. Pga. antagelserne er det kun de tangentiale trækkræfter i hvert punkt, der påvirker strengen. Lad T_1 og T_2 betenge størrelserne af trækkræfterne i hhv. P og Q. Lad α og β betegne vinklerne mellem tangenterne i P hhv. Q og x-aksen. Da der ingen bevægelse er i x-aksens retning, må de to kræfter i denne retning være af samme størrelse:

$$T_1 \cos(\alpha) = T_2 \cos(\beta) = T.$$

I y-retningen har vi to kræfter, nemlig $-T_1 \sin(\alpha)$ og $T_2 \sin(\beta)$, hvor det negative fortegn optræder, fordi kraften i P er i den negative y-retning. Newtons anden lov og mellemværdisætningen giver nu, at den resulterende kraft er $\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x', t)$ for et eller andet $x' \in [x, x + \Delta x]$. Derfor er

$$T_2 \sin(\beta) - T_1 \sin(\alpha) = \rho \Delta(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x', t). \tag{8}$$

Hvis vi dividerer (8) med T, fås

$$\frac{T_2 \sin(\beta)}{T_2 \cos(\beta)} - \frac{T_1 \sin(\alpha)}{T_1 \cos(\alpha)} = \tan(\beta) - \tan(\alpha) = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x', t).$$

Hvis vi bemærker, at $\tan(\alpha) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ og $\tan(\beta) = \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t)$, og vi dividerer med Δx, ser vi at

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x', t),$$

hvor venstre side går mod $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$, mens højre side går mod $c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$, hvor vi har skrevet $c^2 = \frac{T}{\rho}$ som et kvadreret tal for at indikere, at det er ikke-negativt (hvilket er afgørende for klassen af løsninger). Vi har således udledt den én-dimensionelle bølgeligning

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \tag{9}$$

som er en homogen andenordens PDE.

1.3 Løsning af bølgeligningen

[Afsnit 12.3 på side 545 i bogen]
Problemet med den vibrerende streng er ikke fuldstændigt specificeret ved (9) uden de følgende to *yderligere betingelser*. Vores streng er fikseret i endepunkterne, så til enhver tid $t \geq 0$, har vi *randbetingelserne*

$$u(0,t) = 0 \qquad \text{og} \qquad u(L,t) = 0. \tag{10}$$

Da vi forvred og slap strengen, gjorde vi det på en bestemt måde. Mere præcist havde strengen en *begyndelsesværdibetingelse* for alle $x \in [0, L]$ på formen

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{og} \qquad u_t(x,0) = g(x), \tag{11}$$

hvor f er begyndelsesudsvinget og g er begyndelseshastigheden af strengen. Vi vil nu løse PDE'en (9) under antagelse af de yderligere betingelser (10) og (11). Dette gøres i tre trin.

Trin 1: Metoden "separation af de variable" eller "produktmetoden"

Vi antager, at løsningen kan skrives på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ for nogle funktioner F og G. Hvis dette er tilfældet, så er

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = FG'' \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G.$$

Hvis vi indsætter dette i bølgeligningen og dividerer med c^2FG, fås

$$\frac{G''}{c^2G} = \frac{FG''}{c^2FG} = \frac{c^2F''G}{c^2FG} = \frac{F''}{F},$$

hvor udtrykket yderst til venstre kun afhænger af t, mens udtrykket yderst til højre kun afhænger af x. De må derfor være konstante. Hvis vi sætter begge udtryk lig konstanten k og omskriver, fås

$$F'' - kF = 0 \qquad \text{og} \qquad G'' - c^2kG = 0,$$

som er to ODE'er.

Trin 2: At finde løsninger, som opfylder randbetingelserne

Hvis $G \not\equiv 0$, så skal vi bruge $F(0) = 0$ og $F(L) = 0$ for at opfylde (10). Vi bruger nu vores viden om ODE'er til at konkludere, at k må være negativ: Ellers er $k = 0$ og F derfor givet ved $F(x) = ax+b$, eller også er $k > 0$, og så er $F(x) = ae^{\sqrt{k}x} + be^{-\sqrt{k}x}$, men i begge tilfælde medfører formen på disse løsninger og betingelsen $F(0) = F(L) = 0$ at $F \equiv 0$. Dvs. hvis $u \not\equiv 0$, så er $k < 0$ og

$$F(x) = a\cos(px) + b\sin(px),$$

hvor p er givet ved $k = -p^2$. Men $F(0) = F(L) = 0$ medfører at $a = 0$ og $b\sin(pL) = 0$, så $\sin(pL) = 0$, da $b = 0$ ville betyde, at $F \equiv u \equiv 0$. Med andre ord er

$$p = \frac{n\pi}{L}, \qquad \text{for} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Hvis vi sætter $b = 1$, har vi således (tælleligt) uendeligt mange lineært uafhængige løsninger $F_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{L}x)$ for $n \in \mathbb{N}$ ($F_0 \equiv 0$ og for $\mathbb{Z} \ni n < 0$ er $F_n = -F_{-n}$, som svarer til at vælge $b = -1$, da $\sin(-x) = -\sin(x)$).

Dette var F. Vi løser nu for G, idet vi husker at $k = -p^2 = -(\frac{n\pi}{L})^2$, så

$$G'' + \lambda_n^2 G = 0, \qquad \text{hvor} \qquad \lambda_n = cp = \frac{cn\pi}{L}.$$

Fra vor viden om ODE'er genkalder vi at

$$G_n(t) = b_n \cos(\lambda_n t) + b_n^* \sin(\lambda_n t)$$

er en generel løsning. Vi har således fundet løsninger til det oprindelige problem:

$$u_n(x,t) = (b_n \cos(\lambda_n t) + b_n^* \sin(\lambda_n t)) \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big).$$

Disse kaldes *egenfunktioner* med *egenværdier* λ_n for den vibrerende streng. Mængden af egenværdier kaldes *spektrummet*. Vibrationen associeret med den n'te egenværdi og givet ved den n'te egenfunktion kaldes den n'te normaltilstand og har *frekvensen* $\frac{\lambda_n}{2\pi}$. Den første normaltilstand kaldes *fundamentaltilstanden* og de andre kaldes *overtoner*. Da

$$\sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) = 0 \qquad \text{i} \qquad x = \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}L,$$

har den n'te normaltilstand $n-1$ *knudepunkter*, dvs. punkter $x \in (0, L)$ som konstant er lig 0. Vi har også at frekvensen $\frac{\lambda_n}{2\pi} = \frac{cn}{2L} = \frac{\sqrt{\frac{T}{\rho}}n}{2L}$ af u_n vokser med trækkræften T og aftager med længden L.

Trin 3: At finde løsninger, som også opfylder begyndelsesværdibetingelserne

Indtil videre har vi konstrueret løsninger, som opfylder PDE'en (9) og randbetingelserne (10). Vi har ikke fundet løsninger, som opfylder begyndelsesværdibetingelserne (11), bortset fra for visse helt specielle valg. Idéen er nu at finde linearkombinationer af u_n'erne på en sådan måde, at den resulterende funktion opfylder begyndelsesværdibetingelserne. Vi ved fra Sætning 1.5 at vi må tage (endelige) linearkombinationer af løsninger. Vi tager nu chancen og forsøger os med en *uendelig* "linearkombination":

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos(\lambda_n t) + b_n^* \sin(\lambda_n t)) \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big). \tag{12}$$

For at vores oprindelige forvridning f (11) stemmer overens med vores gæt (12), må

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big) = f(x).$$

Dette betyder at b_n'erne skal være Fourierkoefficienterne til den halvsidige udvikling af f,

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Under antagelse af, at vi kan differentiere ledvist i den uendelige sum, får vi tilsvarende for g at

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* \lambda_n \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big) = g(x).$$

Dette svarer til at sætte

$$b_n^* = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\, \mathrm{d}x.$$

Alt i alt, hvis rækken konvergerer og vi kan differentiere ledvist, så har vi netop fundet en løsning, som opfylder de yderligere betingelser (10) og (11). Vi vil nu i tilfældet, hvor $g \equiv 0$ (dvs. vi ikke behøver at differentiere den uendelige sum ledvist) argumentere for, at rækken rent faktisk konvergerer for tilpas pæne f. Under denne antagelse er vores kandidat givet ved

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\lambda_n t) \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big), \qquad \text{hvor} \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$$

Vi bruger nu den trigonometriske identitet

$$\cos\Big(\frac{cn\pi}{L}t\Big)\sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big) = \frac{1}{2}\bigg(\sin\Big(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\Big) + \sin\Big(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\Big)\bigg).$$

Så fås

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{2}\bigg(\sin\Big(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\Big) + \sin\Big(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\Big)\bigg).$$

Skriv f^* for den ulige, $2L$-periodiske udvidelse af f. For tilpas pæne f er

$$f^*(x \pm ct) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\Big(\frac{n\pi}{L}(x \pm ct)\Big)$$

punktvis. Man kan vise (igen for tilpas pæne f), at man kan omarrangere ledene i summen sådan at

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f^*(x-ct) + f^*(x+ct)). \tag{13}$$

En meget naturlig antagelse er, at f er kontinuert (ellers er strengen rykket over til tiden $t=0$), og dette er en mere end rigelig betingelse for, at f er tilpas pæn. Se også Sætning 1.7 i noterne til Lektion 8. Hvis vi nu antager, at f er to gange differentiabel på $(0,L)$, og har ensidigt afledede i $x=0$ og $x=L$ som er 0, så kan (13) vises at opfylde (9), (10) og (11) for $g \equiv 0$ ved direkte udregning.

Hvis f' og f'' blot er stykkevist kontinuerte, eller hvis de ensidigt afledede ikke er 0, så vil der være endeligt mange x, hvor de andenordensafledede i (9) ikke eksisterer. Ikke desto mindre gælder bølgeligningen stadig i alle andre punkter. I dette tilfælde kaldes løsningen (13) en *generaliseret løsning*.