

# Matematisk modellering og numeriske metoder

## Lektion 11

Morten Grud Rasmussen

28. oktober 2015

### 1 Partielle differentiaalligninger

#### 1.1 D'Alemberts løsning af bølgeligningen

[Bogens sektion 12.4 på side 553]

Sidste gang så vi, hvordan man via Fourierrækker kunne løse bølgeligningen med visse yderligere betingelser ("*additional conditions*"). Vi vil nu løse bølgeligningen på en meget mere direkte måde, d'Alemberts metode, som er et specialtilfælde af karakteristikmetoden. At I præsenteres for to forskellige metoder, hvor den ene er meget mere direkte end den anden, skyldes naturligvis, at Fourierrækkemetoden er anvendelig i langt flere tilfælde end d'Alemberts metode.

Vi gennemgår først d'Alemberts metode, som er karakteristikmetoden i tilfældet bølgeligningen. Vi betragter altså

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad \text{hvor} \quad c^2 = \frac{T}{\rho}.$$

Vi introducerer nu nye variable til (midlertidig) erstatning for  $x$  og  $t$ :

$$v = x + ct \quad \text{og} \quad w = x - ct.$$

Idet

$$x = \frac{1}{2}(v + w) \quad \text{og} \quad t = \frac{1}{2c}(v - w)$$

så er

$$u(x, t) = u\left(\frac{1}{2}(v + w), \frac{1}{2c}(v - w)\right)$$

og vi definerer nu en funktion  $\tilde{u}$  ved  $\tilde{u}(v, w) = u\left(\frac{1}{2}(v + w), \frac{1}{2c}(v - w)\right)$ , som egentlig blot er  $u$  udtrykt i andre koordinater. Betragter vi  $v$  og  $w$  som funktioner af  $x$  og  $t$ , så får vi, at

$$u(x, t) = \tilde{u}(v(x, t), w(x, t)).$$

Ved hjælp af kædereglene giver dette

$$u_x = \tilde{u}_v v_x + \tilde{u}_w w_x = \tilde{u}_v + \tilde{u}_w.$$

Under antagelse af, at  $\tilde{u}_{vw} = \tilde{u}_{vw}$  (hvilket gælder, hvis  $u$  har kontinuerte partielt andenordens afledede), så ser vi nu, at

$$u_{xx} = (\tilde{u}_v + \tilde{u}_w)_x = (\tilde{u}_v + \tilde{u}_w)_v v_x + (\tilde{u}_v + \tilde{u}_w)_w w_x = \tilde{u}_{vv} + 2\tilde{u}_{vw} + \tilde{u}_{ww}.$$

For  $u_{tt}$  får vi tilsvarende

$$\begin{aligned} u_{tt} &= (\tilde{u}_t)_t \\ &= (\tilde{u}_v v_t + \tilde{u}_w w_t)_t \\ &= (c\tilde{u}_v - c\tilde{u}_w)_t \\ &= c(\tilde{u}_{vv} v_t + \tilde{u}_{vw} w_t) - c(\tilde{u}_{vw} v_t + \tilde{u}_{ww} w_t) \\ &= c^2(\tilde{u}_{vv} - \tilde{u}_{vw}) - c^2(\tilde{u}_{vw} - \tilde{u}_{ww}) \\ &= c^2(\tilde{u}_{vv} - 2\tilde{u}_{vw} + \tilde{u}_{ww}), \end{aligned}$$

men dermed giver bølgeligningen, at

$$\tilde{u}_{vw} = 0.$$

Denne partielle differentiaalligning (i variablene  $v$  og  $w$ ) kan nu løses ved først at integrere mht. den ene og derefter mht. den anden variabel:

$$\tilde{u}_v = \int 0 \, dw + h(v) = h(v) \quad \text{og} \quad \tilde{u} = \int h(v) \, dv + \psi(w),$$

hvor  $h$  og  $\psi$  dukker op som integrationskonstanter. Da  $h$  er tilfældig, kan vi blot sætte  $\int h(v) \, dv = \varphi$  uden at miste information, og en løsning er altså på formen

$$u(x, t) = \tilde{u}(v(x, t), w(x, t)) = \varphi(v(x, t)) + \psi(w(x, t)) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct),$$

for arbitrære funktioner  $\varphi$  og  $\psi$ . Denne løsning kaldes *d'Alemberts løsning*. Hvis vi får givet begyndelsesbetingelserne

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{og} \quad u_t(x, 0) = g(x),$$

så giver relativt simple beregninger (detaljer kan findes i bogen på side 554), at  $\varphi$  og  $\psi$  må være givet, så

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) \, ds,$$

som altså har den rigtige form, idet vi bemærker, at det svarer til

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) \, ds \quad \text{og} \quad \psi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) \, ds.$$

Det kan vises, at hvis man tilføjer randbetingelserne  $u(0, t) = 0 = u(L, t)$ , så skal  $f$  nødvendigvis være ulige og have periode  $2L$ .

## 1.2 Karakteristikmetoden

Som nævnt er d'Alemberts metode et specialtilfælde af *karakteristikmetoden*, som mere generelt kan bruges på PDE'er på formen

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y),$$

som kaldes kvasilineær, fordi den er lineær i de afledede af højest grad.  $A$ ,  $B$  og  $C$  kan enten være funktioner af  $x$  og/eller  $y$ , eller de kan være konstanter. PDE'er på denne form klassificeres efter fortegnet på  $AC - B^2$  på følgende måde:

Type	Fortegn	Eksempel
Hyperbolsk	$AC - B^2 < 0$	1-dimensionel bølgeligning
Parabolsk	$AC - B^2 = 0$	1-dimensionel varmeligning
Elliptisk	$AC - B^2 > 0$	2-dimensionel Laplace-ligning

Her vil den den vågne læser naturligvis protestere højlydt! For hvis  $A$ ,  $B$  og  $C$  er funktioner, så har  $AC - B^2$  jo ikke nødvendigvis konstant fortegn. Frygt ej, i dette tilfælde taler man så blot om at PDE'en er af *blandet type*, og i afgrænsede områder af  $xy$ -planen vil typen stadig være veldefineret.

Vi bemærker også, at de uafhængige variable ovenfor er benævnt  $x$  og  $y$ , mens både bølgeligningen og varmeligningen naturligt formuleres med en tidslig tolkning af andenkoordinaten, som jo normalt betegnes med  $t$ . Her vil det normalt være naturligt blot at omdøbe  $y$  til  $t$ , men for at bringe ligningerne på en lidt pænere form er det dog kutyme i stedet at sætte  $y = ct$  i bølgeligningen og  $y = c^2t$  i varmeligningen. Herved fås hhv.  $u_{tt} - c^2u_{xx} = c^2(u_{yy} - u_{xx}) = 0$  og  $u_t - c^2u_{xx} = c^2(u_y - u_{xx}) = 0$ .

Idéen i karakteristikmetoden er at bringe PDE'en på såkaldt *normalform*, som afhænger af typen af PDE. Fælles for alle tre typer er det dog, at man først skal løse ODE'en

$$A(y'(x))^2 - 2By'(x) + C = 0, \tag{1}$$

som kaldes den *karakteristiske ligning*. Bemærk her, at det er  $y'^2$ , ikke  $y''$ , samt at det er  $-2B$  og ikke  $2B$  foran  $y'$ ! I det hyperbolske og det elliptiske tilfælde vil (1) have to familier af løsninger, mens der i det parabolske tilfælde kun er én familie af løsninger. Familierne af løsninger kan skrives på følgende form:

$$\Phi(x, y(x)) = k \quad \text{og} \quad \Psi(x, y(x)) = k,$$

hvor  $k$  er en vilkårlig konstant. De to funktioner,  $\Phi$  og  $\Psi$ , kaldes *karakteristikker* for PDE'en. Som i d'Alemberts metode indfører vi nu nogle andre koordinater  $v$  og  $w$  samt en  $\tilde{u}$ , som blot er  $u$  beskrevet i disse koordinater. Hvad  $v$  og  $w$  er, afhænger ligesom normalformen af PDE'ens type og fremgår af nedenstående tabel:

Type	Nye variable	Normalform
Hyperbolsk	$v = \Phi(x, y)$ $w = \Psi(x, y)$	$\tilde{u}_{vw}(v, w) = F(v, w, \tilde{u}, \tilde{u}_v, \tilde{u}_w)$
Parabolsk	$v = x$ $w = \Psi(x, y) = \Phi(x, y)$	$\tilde{u}_{ww}(v, w) = F(v, w, \tilde{u}, \tilde{u}_v, \tilde{u}_w)$
Elliptisk	$v = \frac{1}{2}(\Psi(x, y) + \Phi(x, y))$ $w = \frac{1}{2i}(\Psi(x, y) - \Phi(x, y))$	$\tilde{u}_{vv}(v, w) + \tilde{u}_{ww}(v, w) = F(v, w, \tilde{u}, \tilde{u}_v, \tilde{u}_w)$

Når problemet er bragt på normalform, løses på bedste vis mht.  $\tilde{u}$ , og herefter findes  $u$  ved at finde sammenhængen mellem  $\tilde{u}$  og  $u$  vha. koordinatskiftet.

Det ses, at bølgeligningen omskrevet til formen  $u_{yy} - u_{xx} = 0$  (vi har divideret med  $c^2$ ) som påstået ovenfor er af hyperbolsk type ( $1 \cdot (-1) = -1 < 0$ ). Vi bemærker, at vi i d'Alemberts metode da netop også løste en differentiaalligning af samme form som den hyperbolske normalform med  $F \equiv 0$ . For illustration gentager vi nu øvelsen uden argumenter, men blot ved at følge ovenstående opskrift. Et bevis for metoden er udenfor kursets afgrænsning.

**Eksempel 1.1** (Example 1 i bogen side 556). Vi står altså med den hyperbolske PDE  $u_{yy} - u_{xx} = F$ , hvor  $F \equiv 0$ . Den karakteristiske ligning er

$$Ay'^2 - 2By' + C = 1 \cdot y'^2 - 2 \cdot 0 \cdot y' + 1 = (y' + 1)(y' - 1) = 0,$$

som altså er opfyldt, hvis  $y' + 1 = 0$  eller  $y' - 1 = 0$ . Disse to ODE'er har oplagt løsningerne

$$y(x) = -x + k \quad \text{og} \quad y(x) = x + k,$$

hhv. Vi kan altså skrive de to familier af løsninger på formen

$$\Phi(x, y(x)) = k \quad \text{for} \quad \Phi(x, y) = y + x \quad \text{og} \quad \Psi(x, y(x)) = k \quad \text{for} \quad \Psi(x, y) = y - x.$$

Vi sætter derfor  $v = \Phi(x, y) = y + x$  og  $w = \Psi(x, y) = y - x$ . Det giver  $\tilde{u}(v, w) = u(\frac{1}{2}(v+w), \frac{1}{2}(v-w))$ . Vi skal nu løse

$$\tilde{u}_{vw} = F \equiv 0,$$

og vi er altså tilbage i d'Alemberts setup. Vi får derfor på samme måde som før

$$u(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y),$$

som jo grundet koordinatskiftet  $y = ct$  netop er d'Alemberts løsning.

### 1.3 Udledning af varmeligningen

[Bogens sektion 12.5 på side 557]

Vi vil nu – på samme måde som med bølgeligningen – udlede varmeligningen, som er en model for udbredelse af varmen  $u$ , som er en funktion af de tre rumlige koordinater  $x$ ,  $y$  og  $z$  samt tiden  $t$ , i et legeme, ud fra fysiske betragtninger. Vi begynder som før med nogle fysiske antagelser.

1. Den specifikke varmekapacitet  $\sigma$  og materialets tæthed  $\rho$  er konstant gennem legemet.
2. Der bliver ikke produceret eller fjernet varme fra legemet.
3. Varme bevæger sig fra varme til kolde områder af legemet på en sådan måde, at strømningens hastighed er proportional med gradienten (store temperaturforskelle giver hurtigere udveksling). Dette kan skrives

$$v = -K \text{ grad } u, \tag{2}$$

hvor  $v$  betegner hastigheden af varmestrømningen.

4. Varmeledningsevnen er konstant gennem legemet. Dette svarer til, at  $K$  i ovenstående udtryk er en konstant.

Under disse antagelser vil vi nu udlede varmeligningen.

Lad  $T$  være en kube i legemet med overflade  $S$  og  $n: S \mapsto \mathbb{R}^3$  være en såkaldt ydre normalvektor af længde 1. Dette betyder blot, at for hvert punkt  $p$  i overfladen  $S$  af kuben  $T$ , så er  $n(p)$  en vektor, som står vinkelret på  $S$ , peger udad, og har længde 1. Da måler

$$v(p) \cdot n(p)$$

hastigheden, hvormed varmen forlader (eller, hvis tallet er negativt, trænger ind i) kuben  $T$  i netop punktet  $p$ . Hvis vi altså integrerer over  $S$  (tænk på det som summen af integraler over hver side af kuben for sig – for et passende valg af koordinatsystem svarer dette altså blot til, at man kun integrerer over to af de rumlige koordinater), så får vi altså den samlede mængde af varme, der forlader (hvis integralet er positivt), eller trænger ind i (hvis integralet er negativt),  $T$ :

$$\iint_S v(p) \cdot n(p) \, dA,$$

hvor  $dA$  angiver, at vi integrerer over et overfladeareal. At integrere over en overflade af en kube i  $\mathbb{R}^3$  svarer til, at man "integrerer over endepunkterne" i et interval i  $\mathbb{R}^1$ . At "integrere over endepunkter" af et interval betyder blot, at man tager summen af værdierne i hvert endepunkt. At gange en "ydre normalvektor af længde 1" på integranten i det endimensionelle tilfælde betyder tilsvarende, at venstre endepunkt ganges med  $-1$  mens højre endepunkt ganges med  $+1$ . Alt i alt ender vi altså med, at den endimensionelle pendant til ovenstående overfladeintegral i  $\mathbb{R}^3$  svarer til  $v(b) - v(a)$ , hvor  $a$  og  $b$  er hhv. venstre og højre endepunkt af intervallet. Hvis  $v$  ellers er differentiabel, ser vi nu, at denne sum også kan skrives som

$$v(b) - v(a) = \int_a^b v'(x) \, dx.$$

Det viser sig, at denne formel også har en pendant i  $\mathbb{R}^3$ , som hedder Gauss' divergenssætning.

**Sætning 1.2** (Theorem 1 i bogen på side 453). *Lad  $T$  være en lukket, begrænset delmængde i  $\mathbb{R}^3$  med en overflade  $S$  som er orienterbar (dvs. at man meningsfyldt kan tale om yder- og inderside), stykkevist glat (dvs. at  $S$  kan deles op i endeligt mange dele  $S = \cup_i S_i$  hvorpå den ydre normalvektor af længde 1  $n: S_i \rightarrow \mathbb{R}^3$  er kontinuert). Lad  $F$  være en vektorfunktion som har kontinuerte partielt afledede i et domæne som indeholder  $T$ . Så er*

$$\iiint_T \operatorname{div} F \, dV = \iint_S F \cdot n \, dA.$$

Bruger vi nu antagelsen (2) og anvender Gauss' divergenssætning på udtrykket, får vi

$$\iint_S v \cdot n \, dA = -K \iint_S (\operatorname{grad} u) \cdot n \, dA = -K \iiint_T \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) \, dV = -K \iiint_T \nabla^2 u \, dV.$$

Vi kan også beregne den totale mængde varme i  $T$ :

$$H = \iiint_T \sigma \rho u \, dV,$$

Mængden af varme, der forlader  $T$ , må derfor også være

$$-\frac{\partial H}{\partial t} = - \iiint_T \sigma \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV,$$

idet der ikke bliver produceret varme i eller fjernet varme i legemet. Altså har vi at

$$- \iiint_T \sigma \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV = -K \iiint_T \nabla^2 u dV \quad \text{eller} \quad \iiint_T \left( \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \nabla^2 u \right) dV = 0,$$

hvor  $c^2 = \frac{K}{\sigma \rho}$  skrives som et kvadrat, fordi tallet er positivt. Da dette skal gælde for alle kuber, ligegyldigt hvor små, bliver integranten nødt til at være 0 næsten overalt, hvilket for kontinuerte funktioner medfører, at det gælder overalt. Vi har altså vist, at antagelserne fører til *varmeligningen*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u,$$

hvis løsning giver temperaturen i et givet punkt til et givet tidspunkt, og konstanten  $c^2$  kaldes den *termiske diffusivitet*. Bemærk, at varmeligningen også modellerer kemiske diffusionsprocesser, og derfor også går under navnet *diffusionsligningen*.