

# Matematisk modellering og numeriske metoder

## Lektion 16

Morten Grud Rasmussen

16. november 2015

### 1 Numeriske metoder til førsteordens ODE'er

[Bogens afsnit 21.1 side 898]

#### 1.1 Euler-metoden

Vi stiftede allerede tilbage i lektion 1 kendskab til Euler-metoden til numerisk løsning af IVP'er på formen

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad \text{hvor} \quad y(x_0) = y_0.$$

Da  $y$  er differentiabel, er  $y(x_0 + h) \approx y(x_0) + hf(x_0, y(x_0))$  for  $h$  lille. Hvis vi altså for at fast valg af  $h$  og  $x_0$  sætter  $x_1 = x_0 + h$ ,  $x_2 = x_0 + 2h$  og generelt  $x_n = x_0 + nh$ , så vil

$$\begin{aligned} y_0 &= y(x_0) \\ y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\ &\vdots \\ y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n), \end{aligned}$$

give  $y(x_n) \approx y_n$  hvis  $h$  er lille. Fejlen kan findes vha. Taylors formel. Da er

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{1}{2}h^2y''(\xi) \tag{1}$$

for et passende  $\xi \in [x, x+h]$ . Den lokale diskretiseringsfejl er altså proportional med  $h^2$ , hvilket vi også skriver  $\varepsilon_1 = O(h^2)$ . Hvis vi vil løse IVP'et på et givet interval  $I$ , så er antallet af skridt proportional med  $h^{-1}$ , og den globale diskretiseringsfejl er dermed  $O(h^{-1})O(h^2) = O(h)$ . Vi kalder derfor Euler-metoden for en førsteordensmetode.

## 1.2 Adaptiv skridtlængde

Som i numerisk integration kan vi også i numerisk løsning af IVP'er vælge skridtlængden *adaptivt*. Vi vil illustrere idéen med Euler-metoden. I Euler-metoden er den absolutte lokale diskretiseringsfejl som bekendt  $\frac{1}{2}h^2|y''(\xi)|$  for passende valg af  $\xi$  (se (1)). Tolererer vi derfor maksimalt en fejl på  $T$ , så kan vi ud fra størrelsen af  $|y''(\xi)|$  finde mindstekrav på  $h$ . Men hvordan finder vi så  $|y''(\xi)|$ ? Her er den grundlæggende idé at udnytte, at

$$y''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))f(x, y(x)),$$

som fås ved at differentiere ODE'en vha. kædereglen. De samme principper kan anvendes for de andre løsningsmetoder.

## 1.3 Heuns metode

I praksis er Euler-metoden sjældent god nok. Euler-metoden baserer sig på at opfatte  $y$  som "lokal lineær" og approksimere næste punkt med en lineær fremskrivning

$$y(x_0 + h) \approx y(x_0) + hf(x_0, y(x_0)).$$

Problemet er selvfølgelig, at hældningen  $f(x, y(x))$  ændrer sig på stykket  $[x_0, x_0 + h]$ , og i højre endepunkt er hældningen  $f(x_0 + h, y(x_0 + h))$ . Et bedre bud ville derfor være at basere den lineære fremskrivning på *gennemsnittet* af hældningerne  $f(x_0, y(x_0))$  og  $f(x_0 + h, y(x_0 + h))$ :

$$y(x_0 + h) \approx y(x_0) + \frac{h}{2}(f(x_0, y(x_0)) + f(x_0 + h, y(x_0 + h))). \quad (2)$$

Men hov! Højresiden indeholder jo den ukendte  $y(x_0 + h)$ , som vi forsøger at approksimere, og vi har altså ikke en opskrift på en approksimation af værdien i næste skridt. Løsningen er at udnytte, at hvis Euler-metoden ikke giver et resultat, der er helt hen i vejret, og  $f$  ikke ændrer sig alt for sidsygt (den er jo trods alt kontinuert), så er  $f(x_1, \tilde{y}_1)$ , hvor  $x_1 = x_0 + h$  og  $\tilde{y}_1 = y(x_0) + hf(x_0, y_0)$  som i Euler-metoden, en god approksimation af  $f(x_1, y(x_1))$ . Heuns metode er en systematisk gentagelse af denne ræsonnering. Først findes

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (\text{prædiktoren})$$

og siden sættes

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})) \quad (\text{korrektoren}).$$

Nu vil  $y_n \approx y(x_n)$  og det kan vises, at den lokale diskretiseringsfejl er  $O(h^3)$  mens den globale diskretiseringsfejl er  $O(h^2)$ , altså en forbedring i forhold til Euler-metoden på én orden i skridtlængden.

## 1.4 Runge-Kutta-metoder

Både Euler-metoden og Heuns metode er eksempler på såkaldte *Runge-Kutta-metoder*, som er en klasse af metoder, hvor Euler-metoden er det simpleste eksemplar, mens Heuns metode er en såkaldt to-skridts-Runge-Kutta-metode. Sært barn har lange navne, og vi vil nu se på et særligt medlem af klassen, som er begavet med navne som "Runge-Kutta-metoden," "den klassiske Runge-Kutta-metode" og "RK4," hvor 4-tallet indikerer, at denne metode er en fjerdeordensmetode (den globale diskretiseringsfejl er  $O(h^4)$  og den lokale er  $O(h^5)$ ). I RK4 sættes

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots,$$

hvor

$$k_1 = hf(x_n, y_n), \tag{3a}$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1), \tag{3b}$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2), \tag{3c}$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3). \tag{3d}$$

Det er vigtigt at notere sig, at  $k_i$ 'erne afhænger af  $n$  og skal udregnes fra ny for hvert skridt! Det bemærkes, at hvis  $f$  er konstant som funktion af  $y$ , så svarer  $y'(x) = f(x)$  til at finde en stamfunktion, og ovenstående metode reducerer til Simpsons regel, hvilket stemmer overens med, at RK4 er en fjerdeordensmetode.

### Fejlestimering i RK4

I forbindelse med de numeriske integrationsmetoder sammenlignede vi fejlen ved forskellige skridtlængder og fandt formler for estimering af fejlen. Noget tilsvarende lader sig gøre for RK4. Hvis vi lader  $y_n^h$  betegne RK4-approksimationen af  $y(x_n)$  for  $x_n = x_0 + nh$  med skridtlængde  $h$  og lader  $\varepsilon_n^h$  betegne fejlen i denne værdi, så er

$$\varepsilon_{2n}^h \approx \frac{1}{15}(y_{2n}^h - y_n^{2h}),$$

hvor vi bemærker, at grundet de forskellige skridtlængder approksimerer  $y_{2n}^h$  og  $y_n^{2h}$  samme punkt, nemlig  $y(x_0 + 2nh)$ .

### Runge-Kutta-Fehlberg

I stedet for at estimere fejlen ved at sammenligne forskellige skridtlængder, kan man fejlestimere ved at sammenligne Runge-Kutta-metoder af forskellig orden. En snedig måde, hvor udregningerne fra en 5.-ordensmetode genanvendes i en 4.-ordensmetode, kaldes Runge-Kutta-Fehlberg eller blot RKF og ser ud som følger:

$$y_{n+1} = y_n + \gamma_1 k_1 + \dots + \gamma_6 k_6$$

og

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \tilde{\gamma}_1 k_1 + \dots + \tilde{\gamma}_5 k_5,$$

hvor

$$(\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \quad \gamma_4 \quad \gamma_5 \quad \gamma_6) = \left( \frac{16}{135} \quad 0 \quad \frac{6656}{12825} \quad \frac{28561}{56430} \quad \frac{-9}{50} \quad \frac{2}{55} \right)$$

og

$$(\tilde{\gamma}_1 \quad \tilde{\gamma}_2 \quad \tilde{\gamma}_3 \quad \tilde{\gamma}_4 \quad \tilde{\gamma}_5) = \left( \frac{25}{216} \quad 0 \quad \frac{1408}{2565} \quad \frac{2197}{4104} \quad \frac{-1}{5} \right)$$

mens

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1), \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2), \\ k_4 &= hf(x_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3), \\ k_5 &= hf(x_n + h, y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4) \end{aligned}$$

og

$$k_6 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5).$$

som sagt var idéen, at man får et fejlestimat næsten forærende:

$$\varepsilon_{n+1} \approx y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1} = \frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6.$$

## 1.5 Baglæns Euler-metode

Den baglæns Euler-metode har vi næsten allerede stiftet bekendtskab med i (2), som mere eller mindre er gennemsnittet af Euler-metoden og den baglæns udgave. Med andre ord er den baglæns Euler-metode:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Men hov, råbes der igen. Den ønskede værdi indgår jo på begge sider af lighedstegnet! Jep, det er rigtigt, og metoden er dermed *implicit*, og det afhænger af  $f$ , hvor svært det er at løse ligningen for  $y_{n+1}$ . Hvis ODE'en er lineær, er det simpelt. Den baglæns Euler-metode har samme orden som Euler-metoden, men fordelen ved den baglæns Euler-metode ligger et andet sted. Visse typer af ODE'er er specielt sensitive over for lange skridtlængder, navnligt gælder dette masse-fjeder-systemer med stive fjedre, og disse ODE'er kaldes derfor *stive* ODE'er. Det fine ved den baglæns Euler-metode er, at den er specielt anvendelig for stive ODE'er, som vi vil se et eksempel på om lidt.

## 1.6 Eksempler

**Eksempel 1.1** (Example 1 i bogen side 900). Vi vil anvende Heuns metode med  $h = 0.2$  på IVP'et  $y' = x + y$  med  $y(0) = 0$ . Som i de øvrige Runge-Kutta-metoder, forkorter vi

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \quad \text{og} \quad k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1),$$

hvilket i det konkrete tilfælde bliver til

$$k_1 = 0.2(x_n + y_n) \quad \text{og} \quad k_2 = 0.2(x_n + 0.2 + y_n + 0.2(x_n + y_n)).$$

Heuns metode siger så, at

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = y_n + 0.22(x_n + y_n) + 0.02,$$

hvilket opsummeret i en tabel ser ud som følger for  $n = 0, 1, \dots, 5$ .

$n$	$x_n$	$y_n$	Eksakt løsning	Fejl i Heuns metode	Fejl i Euler-metoden
0	0.0	0.0000	0.0000 ...	0.0000	0.000
1	0.2	0.0200	0.0214 ...	0.0014	0.021
2	0.4	0.0884	0.0918 ...	0.0034	0.052
3	0.6	0.2158	0.2221 ...	0.0063	0.094
4	0.8	0.4153	0.4255 ...	0.0102	0.152
5	1.0	0.7027	0.7183 ...	0.0156	0.230

Det ses, at fejlen er mere end en størrelsesorden mindre for Heuns end for Euler-metoden.

**Eksempel 1.2** (Example 2 i bogen side 903). Vi vil anvende RK4 på samme problem som ovenfor og med samme skridtlængde. Vi får nu fra (3):

$$k_1 = 0.2(x_n + y_n),$$

$$k_2 = 0.2(x_n + 0.1 + y_n + 0.1(x_n + y_n)),$$

$$k_3 = 0.2(x_n + 0.1 + y_n + 0.1(x_n + 0.1 + y_n + 0.1x_n + 0.1y_n))$$

og

$$k_4 = 0.2(x_n + 0.2 + y_n + 0.2(x_n + 0.1 + y_n + 0.1x_n + 0.01 + 0.1y_n + 0.01x_n + 0.01y_n)).$$

Igen smækker vi de første 5 iterationer i en tabel.

$n$	$x_n$	$y_n$	Fejl
0	0.0	0.000000	0.000000
1	0.2	0.021400	0.000003
2	0.4	0.091818	0.000007
3	0.6	0.222107	0.000011
4	0.8	0.425521	0.000020
5	1.0	0.718251	0.000031

Sammenligner vi med Heuns metode, ser vi, at fejlen er ca. tre størrelsesordener mindre.

**Eksempel 1.3** (Example 4 bogen side 906). IVP'et  $y'(x) = f(x, y(x)) = -20y(x) + 20x^2 + 2x$  med  $y(0) = 1$  har løsningen  $y(x) = e^{-20x} + x^2$  (sæt ind og tjek). Vi vil nu løse problemet vha. den baglæns Euler-metode og sammenligne med den almindelige og RK4 for hhv. at demonstrere metoden og vise, at den klarer dette stive problem uden at blive ustabil selv for  $h$  hvor de andre er.

Med udgangspunkt i

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h(-20y_{n+1} + 20x_{n+1}^2 + 2x_{n+1})$$

fås

$$y_{n+1} = \frac{y_n + 20hx_{n+1}^2 + 2hx_{n+1}}{1 + 20h} = \frac{y_n + 20h(x_n + h)^2 + 2h(x_n + h)}{1 + 20h}.$$

I følgende tabel er resultatet af de tre metoder med hver to forskellige værdier af  $h$  angivet.

$x$	Baglæns Euler $h = 0.05$	Baglæns Euler $h = 0.20$	Almindelig Euler $h = 0.05$	Almindelig Euler $h = 0.10$	RK4 $h = 0.10$	RK4 $h = 0.20$	Eksakt
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	0.262		0.008	-1.000	0.345		0.145
0.2	0.105	0.248	0.038	1.040	0.153	5.093	0.058
0.3	0.108		0.088	-0.920	0.129		0.092
0.4	0.166	0.210	0.158	1.160	0.175	25.48	0.160
0.5	0.253		0.248	-0.760	0.257		0.250
0.6	0.363	0.378	0.358	1.360	0.364	127.0	0.360
0.7	0.493		0.488	-0.520	0.493		0.490
0.8	0.643	0.652	0.638	1.640	0.643	634.0	0.640
0.9	0.813		0.808	-0.200	0.813		0.810
1.0	1.003	1.010	0.998	2.000	1.003	3168	1.000

Det ses, at den almindelige Euler-metode med  $h = 0.10$  og ikke mindst RK4 med  $h = 0.20$  opfører sig helt tosset. Dette illustrerer *stivheden* i ODE'en, og samtidig den baglæns Euler-metodes overlegne håndtering af dette problem: selv for  $h = 0.20$  er resultaterne rimelige, omend lige lovligt store omkring løsningens minimum.