Matematisk modellering og numeriske metoder

Lektion 3

Morten Grud Rasmussen

September 22, 2015

1 Eksakte ODE'er og integrerende faktorer

[Bogens afsnit 1.4, side 20]

1.1 Hvad er eksakte ODE'er for nogle?

Inden vi slår os løs med ODE'er, så kigger vi lige på en funktionalligning, dvs. en ligning, hvor den ubekendte er en funktion, og hvor ligningen ikke afhænger af afledte af funktionen (modsat eksempelvis ODE'er). I det følgende vil vi kalde den ubekendte funktion y, og den uafhængige variabel for x, præcis som vi plejer.

Antag, at vi har en funktion u af to variable, hvis partielt afledede er kontinuerte. Den funktionalligning, vi er interesseret i, er den følgende:

$$u(x, y(x)) = c, \tag{1}$$

hvor c er en eller anden konstant. Vi kunne f.eks. vælge $c = 3$ og lade funktionen u være givet ved $u(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1}$. I dette (simple) tilfælde kan vi nemt finde den ubekendte funktion:

$$u(x, y(x)) = \frac{y(x)}{x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = 3x, \quad x \neq 0. \tag{2}$$

Generelt kaldes funktioner y, som er givet ved en funktionalligning i stil med (1), for *implicit givne funktioner*, og er u tilpas simpel, så kan man let finde en *eksplicit* formel for y udfra (1), præcis som vi så i (2). Og selv hvis u ikke er så simpel, så vil man dog ofte kunne undersøge egenskaber for y, eksempelvis numerisk vha. computerprogrammer.

Betragt nu igen (1). På venstresiden indgår den uafhængige variabel x, mens der på højresiden blot står en konstant. Vi kan derfor bruge kædereglen for funktioner af flere variable på venstresiden og få et udtryk, der er lig det 0, man får, hvis man differentierer konstanten c mht. x:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = M(x, y(x)) + N(x, y(x))y'(x) = 0, \tag{3}$$

hvor $M = \frac{\partial u}{\partial x}$ og $N = \frac{\partial u}{\partial x}$ (pr. antagelse) er kontinuerte funktioner af to variable. Som alle kan se, så er (3) en ODE, men den er netop konstrueret sådan, at dens løsninger er identiske med løsningerne til (1) for forskellige valg af konstanter c. Vi kan altså finde løsningerne til ODE'en (3) blot ved at løse (1). Denne idé er god nok til at have fået et navn:

Definition 1.1 (Eksakt ODE)**.** En ODE på formen

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x))y'(x) = 0 \tag{4}$$

kaldes *eksakt*, såfremt der eksisterer en funktion u af to variable med kontinuerte afledede, således at

$$M = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{og} \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{5}$$

Ingeniører og andet godtfolk ynder at skrive (4) på den matematisk tvivlsomme men intuitivt klare form

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

idet de tolker funktionen $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ som en brøk og "ganger igennem med" $\mathrm{d}x$. Dette er således også den foretrukne form i bogen.

Såfremt M og N har kontinuerte partielt afledede, så følger det let, at en nødvendig (og tilstrækkelig) betingelse for, at en ODE på formen (4) er eksakt, er, at

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{6}$$

For at bruge idéen med eksakte ODE'er til noget, skal vi dog først finde u. Her kan man enten forsøge sig med kvalificerede gæt, eller man kan integrere ét af udtrykkene i (5). Forsøger vi os i første omgang med udtrykket til venstre, når man til følgende:

$$u(x_1, x_2) = \int^{x_1} M(x, x_2)\,\mathrm{d}x + k(x_2), \tag{7}$$

hvor x_1-afhængigheden af det ubestemte integral er indikeret ved den øvre integrationsgrænse. "Integrationskonstanten" $k(x_2)$ kan afhænge af x_2 – prøv selv at differentiere begge sider mht. x_1, hvor $k(x_2)$ opfattes som en funktion af x_2 og genfind $M = \frac{\partial u}{\partial x}$. For at bestemme funktionen k, bestemmes først k' ved at isolere i følgende udtryk:

$$N = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \int M(x, x_2)\,\mathrm{d}x}{\partial x_2} + k' \quad \Rightarrow k' = N - \frac{\partial \int M(x, x_2)\,\mathrm{d}x}{\partial x_2}.$$

Herefter fås k ved at integrere k'. Havde vi i stedet taget udgangspunkt i udtrykket til højre i (5), så havde vi i stedet for (7) fået

$$u(x_1, x_2) = \int^{x_2} N(x_1, x)\,\mathrm{d}x + l(x_1),$$

hvor l bagefter skal findes ved en procedure, som er analog til måden, hvorpå vi fandt k.

Det er alt sammen meget godt, men må vi se et eksempel? Jep:

Eksempel 1.2 (Example 1, bogen side 22)**.** Vi skal løse ODE'en

$$\cos(x+y(x)) + (3y(x)^2 + 2y(x) + \cos(x+y(x)))y'(x) = 0,$$

som vi, qua det aktuelle tema, forventer er eksakt. Først identificerer vi M og N:

$$M(x_1,x_2) = \cos(x_1+x_2) \quad \text{og} \quad N(x_1,x_2) = 3x_2^2 + 2x_2 + \cos(x_1+x_2).$$

Dvs.

$$\frac{\partial M}{\partial x_2}(x_1,x_2) = -\sin(x_1+x_2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial N}{\partial x_1} = -\sin(x_1+x_2).$$

Minsandten! Vild jubel. Alle er glade. Vi er dog ikke færdige her. Vi skal også have bestemt u:

$$u(x_1,x_2) = \int^{x_1} \cos(x+x_2)\,\mathrm{d}x + k(x_2) = \sin(x_1+x_2) + k(x_2).$$

Og k':

$$k'(x_2) = 3x_2^2 + 2x_2 + \cos(x_1+x_2) - \cos(x_1+x_2) = 3x_2^2 + 2x_2.$$

Vi integrerer k':

$$k(x_2) = \int^{x_2} 3x^2 + 2x\,\mathrm{d}x = x_2^3 + x_2^2 + k_0$$

for et passende valg af k_0. Dvs.

$$u(x_1,x_2) = \sin(x_1+x_2) + x_2^3 + x_2^2 + k_0.$$

Altså vil vores løsning y opfylde funktionalligningen

$$u(x,y(x)) = \sin(x+y(x)) + y(x)^3 + y(x)^2 + k_0 = c$$

som, ved at sætte $\tilde{c} = c - k_0$, er ækvivalent med

$$\sin(x+y(x)) + y(x)^3 + y(x)^2 = \tilde{c}.$$

Vi vil ikke finde et eksplicit udtryk for y men blot konstatere, at vores formel er rigtig, idet

$$\frac{\mathrm{d}u(\cdot,y(\cdot))}{\mathrm{d}x}(x) = \cos(x+y(x)) + (\cos(x+y(x)) + 3x^2 + 2x)y'(x) = 0$$

er den oprindelige ligning.

1.2 Integrerende faktorer

ODE'en $-y(x)+xy'(x) = 0$ er ikke eksakt (se eksempel 3 side 23 i bogen). Det bliver den dog, hvis man ganger igennem med $\frac{1}{x^2}$, hvilket I selv kan tjekke efter. Vi havde altså en ikke-eksakt ODE på formen $P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x) = 0$ som vi ved at gange med en funktion F fik på eksakt form:

$$F(x,y(x))P(x,y(x)) + F(x,y(x))Q(x,y(x))y'(x) = 0$$

(i vores tilfælde havde F dog triviel afhængighed af den anden uafhængige variabel). Igen en idé, der er god nok til at få et navn:

Definition 1.3. Hvis ODE'en

$$P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x) = 0$$

kan bringes på eksakt form

$$F(x, y(x))P(x, y(x)) + F(x, y(x))Q(x, y(x))y'(x) = 0$$

ved at multiplicere med en funktion F, så kaldes F en *integrerende faktor*.

Da FP og FQ spiller M og N's roller, opfylder de også de samme betingelser som M og N. Ved hjælp af produktreglen har vi altså, at

$$\frac{\partial F}{\partial y}P + F\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}Q + F\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Kan vi finde simple integrerende faktorer, som kun afhænger af den ene eller den anden variabel, reduceres dette til

$$F\frac{\partial P}{\partial y} = F'Q + F\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{eller} \quad F'P + F\frac{\partial P}{\partial y} = F\frac{\partial Q}{\partial x}$$

hhv., og disse udtryk kan omskrives til

$$\frac{1}{F}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{Q}\Big(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\Big) \quad \text{eller} \quad \frac{1}{F}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{P}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)$$

hhv. Dette bruges til at vise følgende sætning:

Sætning 1.4 (Theorem 1 og 2, bogen side 25). *Hvis funktionerne P og Q i ODE'en*

$$P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x) = 0$$

opfylder, at

$$R(x, y) = \frac{1}{Q(x, y)}\Big(\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\Big)$$

er konstant som funktion af y for fast x, så er

$$F(x, y) = F(x) = \exp\int^x R(x_1, y)\,\mathrm{d}x_1$$

en integrerende faktor. Tilsvarende, hvis

$$R^*(x, y) = \frac{1}{P(x, y)}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\Big)$$

er konstant som funktion af x for fast y, så er

$$F^*(x, y) = F^*(y) = \exp\int^y R^*(x, y_1)\,\mathrm{d}y_1$$

en integrerende faktor.

2 Lineære ODE'er

[Bogens afsnit 1.5, side 27]

2.1 De grundlæggende definitioner

Definition 2.1. *Lineære førsteordens ODE'er* er ODE'er, der er – eller vha. algebra kan bringes – på formen

$$y'(x) + p(x)y(x) = r(x). \tag{8}$$

En lineær førsteordens ODE siges at være på standardform, hvis den allerede er på formen (8). I mange ingeniørsammenhænge kaldes funktionen r for *inputtet*, mens y kaldes for *outputtet* eller *responsen på inputtet*. Hvis $r \equiv 0$, kaldes ODE'en en *homogen* lineær førsteordens ODE.

Som altid starter vi med det simpleste. Antag altså, at vi har en homogen lineær ODE

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0. \tag{9}$$

En hurtig omskrivning (separation af de variable) giver

$$\frac{1}{y(x)}y'(x) = -p(x) \tag{10}$$

som ved integration bliver til

$$\ln|y(x)| = -\int p(x)\,\mathrm{d}x + c.$$

Tager man nu eksponentialfunktionen på begge sider og ophæver numerisk-tegnene, får man

$$y(x) = \pm e^c e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} = \tilde{c}e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}, \tag{11}$$

hvor $\tilde{c} = \pm e^c \neq 0$. Vi bemærker nu, at vi ved omskrivningen til (10) faktisk antog, at $y \neq 0$, da vi jo dividerer med $y(x)$. Et hurtigt tjek viser dog, at også $y \equiv 0$ er en løsning, så generelt er (11) altså en løsning for alle reelle værdier af $\tilde{c}$.

Det næste skridt er selvfølgelig at finde løsningen for en ikke-homogen lineær ODE. I første omgang konstaterer vi, at hvis vi sætter funktionen $h = \int p(x)\,\mathrm{d}x$, så er F givet ved $F(x) = e^{h(x)}$ en integrerende faktor for den homogene lineære ODE (9):

$$F(x)y'(x) + F(x)p(x)y(x) = (F(x)y(x))' = 0.$$

Det må betyde, at

$$(Fy)' = Fr,$$

som integreres til

$$e^h y = Fy = \int F(x)r(x)\,\mathrm{d}x = \int e^{h(x)}r(x)\,\mathrm{d}x + c.$$

Vi kan nu dividere igennem med e^h og få den generelle løsningsformel

$$y = e^{-h}\Big(\int e^{h(x)}r(x)\,\mathrm{d}x + c\Big) \quad \text{hvor} \quad h = \int p(x)\,\mathrm{d}x. \tag{12}$$

(Vi bemærker, at integrationskonstanten i h ikke er af betydning: hvis vi erstatter h med $\tilde{h}$ som er givet ved $\tilde{h}(x) = h(x) + k$, så vil e^{-k} optræde som en konstant foran parentesen, men dette vil kompenseres af en tilsvarende faktor e^k indenfor integralet samt ved at foretage et andet valg af

c.) Idet konstanten c er bestemt af eventuelle begyndelsesværdibetingelser, kan løsningsformlen tolkes i følgende ingeniørtermer:

$$y = e^{-h} \int e^{h(x)} r(x)\, \mathrm{d}x + e^{-h} c$$

læses som "outputtet er lig med responsen på inputtet r plus responsen på begyndelsesværdibetingelsen c".

Eksempel 2.2 (Bogens Example 1 på side 29)**.** Vi skal løse IVP'et

$$y'(x) + y(x)\tan(x) = \sin(2x) \quad \text{hvor} \quad y(0) = 1.$$

Vi begynder med at identificere funktionerne p, r og h:

$$p(x) = \tan(x), \quad r(x) = \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \quad \text{og} \quad h(x) = \int_a^x \tan(x_1)\, \mathrm{d}x_1 = \ln(|\sec(x)|)$$

for et passende valg af a, hvor $\sec$ er sekantfunktionen, $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ (husk, at vi selv må vælge a jf. diskussionen ovenfor). Vi får altså

$$e^{h(x)} = |\sec(x)|, \quad e^{-h(x)} = |\cos(x)| \quad \text{og} \quad e^{h(x)} r(x) = |\sec(x)| 2\sin(x)\cos(x) = 2\sin(x)\,\mathrm{sgn}(\cos(x))$$

hvor sgn er fortegnsfunktionen ("signum"), så den generelle løsning er

$$y(x) = |\cos(x)| \Big(2\int_b^x \sin(x_1)\,\mathrm{sgn}(\cos(x_1))\, \mathrm{d}x_1 + c \Big) = |\cos(x)| \Big(2\int_b^x \sin(x_1)\,\mathrm{sgn}(\cos(x_1))\, \mathrm{d}x_1 + c \Big),$$

som måske ser lidt uoverskuelig ud. Vi bemærker derfor, at IVP'et slet ikke giver mening i $\frac{\pi}{2} + n\pi$ for alle $n \in \mathbb{Z}$ ($\tan$ er ikke defineret her) samtidig med, at har $\cos$ konstant fortegn og $\sin$ integrerer til 0 henover intervallet mellem disse punkter. Dvs., at vi ved at sætte $\tilde{c} = \mathrm{sgn}(\cos(x))c$ kan skrive

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathrm{sgn}(\cos(x))|\cos(x)| \Big(2\int_b^x \sin(x_1)\, \mathrm{d}x_1 + \tilde{c} \Big) \\ &= 2\cos(x)(-\cos(x) + \cos(b)) + \tilde{c}\cos(x) \\ &= -2\cos^2(x) + k\cos(x), \end{aligned}$$

hvor $k = \tilde{c} + 2\cos(b)$. Da begyndelsesværdibetingelsen er $y(0) = 1$, ser vi, at $y(0) = -2\cos^2(0) + k\cos(0) = -2 + k = 1$, så $k = 3$. Her kan $3\cos(x)$ tolkes som responsen til begyndelsesværdibetingelsen og $-2\cos^2(x)$ tolkes som responsen til inputtet $\sin(2x)$.

2.2 Bernoulli-ligningen

Selvom en ODE er ikke-lineær, kan man sommetider transformere den til en lineær ODE. Et meget anvendeligt eksempel er *Bernoulli-ligningen*

$$y'(x) + p(x)y(x) = g(x)y(x)^a, \tag{13}$$

som for a forskellig fra 0 og 1 er ikke-lineær. Tricket er i stedet at betragte

$$u' + (1-a)pu = (1-a)g, \tag{14}$$

som er en lineær ODE og indse, at en løsning u til (14) giver en løsning y til (13) ved at sætte $u(x) = (y(x))^{1-a}$:

$$(1-a)y^{-a}y' + (1-a)py^{1-a} = (1-a)g,$$

som ved at dividere med $(1-a)y^{-a}$ bliver til (13).

Eksempel 2.3 (Example 4 på side 32 i bogen)**.** Logistisk vækst er en løsning til den *logistiske ligning*

$$y'(x) = Ay(x) - By(x)^2,$$

som er et eksempel på en ligning på formen (13) med $p \equiv -A$, $g \equiv -B$ og $a = 2$. Vi skal altså løse

$$u' - (1-2)Au = -(1-2)B$$

eller

$$u' + Au = B.$$

Vi bruger nu løsningsformlen og får

$$u(x) = ce^{-Ax} + \frac{B}{A}.$$

Da $a = 2$, er

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{ce^{-Ax} + \frac{B}{A}}.$$

Derudover er $y \equiv 0$ også en løsning, hvilket kan ses direkte af ODE'en. Der er således to konstante løsninger (sæt $c = 0$ og få $y \equiv \frac{A}{B}$).

2.3 Populationsdynamik

Ovenstående eksempel er en ofte benyttet model for vækst. Hvis $B = 0$ er løsningen en eksponentialfunktion, og dette svarer til ubegrænset vækst. B er altså nødvendig for at bremse væksten, og hvis vi omskriver til $y' = Ay(1 - \frac{B}{A}y)$, så ser vi, at hvis $y < \frac{A}{B}$, så er $y' > 0$, så y vokser for $y < \frac{A}{B}$, mens hvis $y > \frac{A}{B}$, så aftager y. Grænsen er, som man kunne forvente, $\frac{A}{B}$.

En anden interessant egenskab ved logistisk vækst er, at ligningen kun afhænger af den uafhængige variabel x gennem y og y' og altså kan skrives på formen

$$y' = f(y). \tag{15}$$

En sådan ODE kaldes *autonom*. Generelt har autonome ODE'er (alså ODE'er på formen (15)) konstante løsninger givet ved nulpunkter for f (prøv selv at sætte ind!), og sådanne nulpunkter kaldes *kritiske punkter* for (15). Et sådant kritisk punkt kan være *stabilt*, hvis løsninger tæt på den konstante løsning i det kritiske punkt konvergerer mod den konstante løsning, eller *ustabilt*, hvis løsninger, som starter tæt på den konstante løsning, bevæger sig væk fra den konstante løsning.

3 Eksistens og entydighed af løsninger

Der findes både IVP'er uden løsninger, med netop én løsning, og med to eller flere (ja, faktisk uendeligt mange) løsninger. Ofte er det rart at vide, om der findes en løsning (hvorfor ellers lede?), og om der er kun er én ("jeg har fundet en løsning, så det må være den rigtige!"). Til dette har vi følgende to sætninger:

Sætning 3.1. *Antag, at der findes et rektangel* $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ *så IVP'et*

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$

opfylder følgende:

1. f *er kontinuert for alle* $(x, y) \in R$
2. f *er begrænset på* R *(dvs. der eksisterer et* $K > 0$ *så* $|f(x, y)| \leq K$ *for alle* $(x, y) \in R$*).*

Så findes der en løsning y *defineret for alle* x *i intervallet* $[x_0 - \min(a, \frac{b}{K}), x_0 + \min(a, \frac{b}{K})]$.

Sætning 3.2. *Antag, at der findes et rektangel* $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ *så IVP'et*

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$

opfylder følgende:

1. f *og* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *er kontinuerte for alle* $(x, y) \in R$
2. f *og* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *er begrænsede på* R *(dvs. der eksisterer et* $K > 0$ *og et* $M > 0$ *så* $|f(x, y)| \leq K$ *og* $|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)| \leq M$ *for alle* $(x, y) \in R$*).*

Så findes der netop én løsning y *defineret for alle* x *i intervallet* $[x_0 - \min(a, \frac{b}{K}), x_0 + \min(a, \frac{b}{K})]$.