Matematisk modellering og numeriske metoder

Lektion 4

Morten Grud Rasmussen

September 23, 2015

1 Homogene andenordens lineære ODE'er

[Bogens afsnit 2.1]

1.1 Linearitetsprincippet

Vi så sidste gang, at førsteordens homogene lineære ODE'er var ODE'er, der kunne bringes på standardformen

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0,$$

og følgende definition burde derfor ikke komme som en overraskelse:

Definition 1.1 (Andenordens homogene lineære ODE'er)**.** En ODE som er – eller vha. algebra kan bringes – på formen

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0,$$

kaldes en *andenordens homogen lineær ODE*.

En anden ting fra sidste gang, der er værd at bide mærke i, er, at den generelle løsningsformel for en førsteordens homogen linær ODE var

$$y = ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

hvor c kan være et vilkårligt reelt tal. Vi minder om, at begrebet linearitet beskæftiger sig med forholdet mellem nogle størrelser (f.eks. v og u), som vi kalder vektorer, deres sum (f.eks. $u + v$), og deres skalering (f.eks. au) med en (typisk reel) skalar (her betegnet a). Lad nu c_1, c_2 og a være reelle tal og definér

$$y_1 = c_1e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \quad \text{og} \quad y_2 = c_2e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Det er nu oplagt, at $y_1 + y_2 = (c_1 + c_2)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ samt $ay_1 = (ac_1)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ også er løsninger, idet $c_1 + c_2$ og ac_1 også er reelle tal. I matematiske termer siges *løsningsrummet for førsteordens homogene* *lineære ODE'er* at være *lukket under linearkombinationer*, altså summer og skaleringer af løsninger er også løsninger. I førsteordenstilfældet er det ikke noget, man gør så meget ud af, idet det koger ned til, at summer og produkter af reelle tal også er reelle tal, men det er alligevel instruktivt at bemærke, at dette faktum dog også let kan ses af ODE'en:

$$(ay)'+p(ay) = ay'+apy = a(y'+py) = a\cdot 0 = 0 = 0+0 = (y_1'+py_1)+(y_2'+py_2) = (y_1+y_2)'+p(y_1+y_2),$$

som altså ikke blot er otte måder at skrive nul på, men også et bevis for, at løsningsrummet for førsteordens homogene lineære ODE'er er lukket under linearkombinationer, som ikke hænger på den generelle løsningsformel, men følger direkte af definitionen. Hvorfor al den snak? Sagen er naturligvis, at det samme gælder for andenordens homogene lineære ODE'er, med verbatim det samme bevis:

$$(ay)'' + p(ay)' + q(ay) = ay'' + apy' + aqy = a(y'' + py' + qy) = a \cdot 0 = 0$$

og

$$(y_1+y_2)''+p(y_1+y_2)'+q(y_1+y_2) = y_1''+y_2''+py_1'+py_2'+qy_1+qy_2 = (y_1''+py_1'+qy)+(y_2''+py_2'+qy_2) = 0+0,$$

hvor evalueringen af sidste sum er overladt til læseren pga. den begrænsede sidebredde. Vi opsummerer:

Sætning 1.2 (Theorem 1 på side 48 i bogen)**.** *Hvis to løsninger til en andenordens homogen lineær ODE er defineret på samme interval, så vil også skaleringer af disse samt deres sum være løsninger på dette fælles interval.*

I førsteordenstilfældet kunne denne sætning reduceres til et udsagn om reelle tal, men dette *linearitetsprincip* (løsningsrummet for første-/andenordens homogene lineære ODE'er er lukket under linearkombinationer) spiller en mere prominent rolle i andenordenstilfældet. Dette skyldes følgende tommelfingerregel: *løsningsrummet for n'te-ordens ODE'er er typisk n-dimensionelt*, et udsagn som løbende vil blive uddybet og præciseret i løbet af kurset. Vi tager først et eksempel:

Eksempel 1.3 (Bogens Example 1 på side 47)**.** Vi betragter den homogene, lineære andenordens-ODE

$$y'' + y = 0.$$

Det er oplagt, at både $\cos$ og $\sin$ løser denne ODE (differentiér selv to gange og sæt ind). Jævnfør Sætning 1.2 er således også alle funktioner f på formen

$$f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$$

løsninger, for alle valg af reelle konstanter a og b. Vi skal senere se, at alle løsninger nødvendigvis er på denne form. Da $\cos$ og $\sin$ ikke kan skrives som skaleringer af hinanden, siger man, at $\cos$ og $\sin$ er *lineært uafhængige*, og da alle løsninger kan skrives som en *linearkombination* af disse to lineært uafhængige funktioner, siger man, at de udgør en *basis* for *løsningsrummet*, som dermed er af *dimension* 2.

Vi vil nu mere formelt definere begreberne linearkombination, uafhængighed, dimension og basis.

Definition 1.4 (Linearkombination, uafhængighed, dimension og basis)**.** Lad M være en mængde vektorer (dvs. matematiske størrelser, som kan adderes og skaleres). En *linearkombination* er da en endelig sum af skalerede elementer fra M, dvs. noget, der kan skrives på formen:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_{n-1} v_{n-1} + a_n v_n$$

hvor n er et naturligt tal, $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ er skalarer ((typisk reelle) tal) og $v_i \in M$ for $i = 1, \ldots, n$.

Vektorerne i M kaldes *uafhængige*, hvis

$$\sum_{v \in M} a_v v = 0$$

medfører, at $a_v = 0$ for alle $v \in M$. Med andre ord: den eneste linearkombination af vektorer i M, som giver nul, er den trivielle linearkombination, hvor alle skalarer er 0.

Dimensionen af et vektorrum[1] er lig det højeste antal lineært uafhængige vektorer, der kan findes i vektorrummet.

En mængde vektorer $B \subset V$ siges at være en *basis* for vektorrummet V, såfremt vektorerne i B er uafhængige og antallet af vektorer i B er lig med dimensionen af V.

Det er værd at understrege, at alle vektorer i et vektorrum V med basis B kan skrives (entydigt) som en linearkombination af basiselementerne i B, men vi springer beviset over. I relation til Eksempel 1.3 betyder dette, at for at bevise at alle løsninger kan skrives på den angivne form, $a\cos + b\sin$, er det nok at vide at $\sin$ og $\cos$ er uafhængige løsninger, samt at dimensionen af løsningsrummet er 2. Sidstnævnte oplysning følger af en eksistens- og entydighedssætning, som vi vil behandle næste gang, samt en betragtning omkring BVP'er, som vi straks vil fokusere på:

1.2 BVP'er for andenordens homogene lineære ODE'er

Det viser sig, at den rette definition af et BVP i andenordenstilfældet er bygget på følgende

Definition 1.5 (Begyndelsesbetingelse for andenordens-ODE'er)**.** En begyndelsesbetingelse (BB) for andenordens-ODE'er består af to krav på formen

$$y(x_0) = K_0 \quad \text{og} \quad y'(x_0) = K_1.$$

Eksempel 1.6 (Bogens Example 4 på side 49)**.** Vi har set, at linearkombinationer af $\cos$ og $\sin$ løser $y'' + y = 0$. Et BVP for denne ODE er givet ved BB'en

$$y(0) = 3 \qquad \text{og} \qquad y'(0) = -\frac{1}{2}$$

Da $\binom{\cos(0)}{\cos'(0)} = \binom{1}{0}$ og $\binom{\sin(0)}{\sin'(0)} = \binom{0}{1}$ er lineært uafhængige, kan vi (entydigt) finde a og b så

$$a \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \cos'(0) \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sin(0) \\ \sin'(0) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

og det kræver ikke fuld ædruelighed at se, at løsningen er $a = 3$ og $b = -\frac{1}{2}$. Vores BVP har derfor løsningen

$$y(x) = 3\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x).$$

[1] Vi minder om, at et vektorrum V er en mængde, hvor $av \in V$ og $v + u \in V$, hvis a er en skalar og $u, v \in V$.

1.3 Reduktion af orden

Vi vil nu gennemgå en metode til givet én kendt løsning at finde en anden løsning til en andenordens homogen lineær ODE, som er kendt under navnet *reduktion af orden*. Vi starter med at anvende metoden i et konkret tilfælde og destillerer derefter den generelle metode.

Eksempel 1.7 (Bogens Example 7 på side 51)**.** Vi skal finde to lineært uafhængige løsninger[2] til ODE'en

$$(x^2 - x)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0. \tag{1}$$

Når koefficientfunktionerne er polynomier, er det ofte en god idé at prøve at se, om vi kan finde en løsning, som er et polynomium, og vi konstaterer, at $y_1(x) = x$ rent faktisk er en løsning. Vi mangler derfor blot at finde én anden, uafhængig løsning, sagt med andre ord, en løsning y_2 hvorom det gælder, at $ay_1 + by_2 \equiv 0$ medfører, at $a = b = 0$. Hvis vi derfor antager, at den anden løsning y_2 kan skrives på formen $y_2(x) = y_1(x)u(x)$, så kan u ikke være en konstant funktion. Vi vil nu prøve at bestemme et sådant u. Sæt $y(x) = u(x)y_1(x) = u(x)x$ og udregn:

$$y'(x) = u'(x)x + u(x) \qquad \text{og} \qquad y''(x) = u''(x)x + 2u'(x).$$

Sætter vi dette y ind i ODE'en, får vi:

$$0 = (x^2 - x)(u''(x)x + 2u'(x)) - x(u'(x)x + u(x)) + u(x)x = (x^2 - x)(u''(x)x + 2u'(x)) - u'(x)x^2.$$

Vi forkorter nu med x:

$$(x - 1)(u''(x)x + 2u'(x)) - u'(x)x = (x^2 - x)u''(x) + (x - 2)u'(x) = 0,$$

som ved at sætte $v = u'$ bliver til:

$$(x^2 - x)v'(x) + (x - 2)v(x) = 0, \tag{2}$$

som altså er en førsteordens-ODE, deraf navnet *reduktion af orden*. Separation af de variable giver nu

$$\frac{1}{v(x)}v'(x) = -\frac{x-2}{x^2-x} = \frac{x}{x^2-x} - \frac{2(x-1)}{x^2-x} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x},$$

som ved integration giver

$$\ln|v(x)| = \ln|x - 1| - 2\ln|x| = \ln\left|\frac{x-1}{x^2}\right| + k,$$

hvor vi kan vælge $k = 0$, da vi blot skal bruge én løsning. Dette medfører

$$|v(x)| = \left|\frac{x-1}{x^2}\right|,$$

så vi har de to (lineært afhængige) løsninger til (2)

$$v(x) = \pm\frac{x-1}{x^2} = \pm\frac{1}{x} \mp \frac{1}{x^2}.$$

[2] I bogen står der *basis*, men da vi ikke har grundlag for at sige, at det er en basis, før vi har diskuteret eksistens og entydighed i næste lektion, så holder vi os til dét, vi ved, nemlig at vi skal finde to lineært uafhængige løsninger.

Vi skal dog blot finde én løsning til (1), og det gør vi ved at vælge den ene af de to mulige løsninger til (2) ovenfor (f.eks. $v_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$) og bruge $v_1 = u'$ og $y_2(x) = u(x)x$:

$$u = \int v_1(x)\,\mathrm{d}x + c \quad \text{giver} \quad u(x) = \ln|x| + \frac{1}{x}$$

for passende valg af c, så

$$y_2(x) = x\ln|x| + 1$$

er den ønskede anden løsning.

Dette var reduktion af orden i et konkret tilfælde. Vi vil nu gennemgå den generelle metode. Tag derfor en andenordens homogen lineær ODE på *standardform*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0.$$

Antag, at y_1 er en løsning og sæt $y_2 = uy_1$, så

$$y_2' = u'y_1 + uy_1' \qquad \text{og} \qquad y_2'' = u''y_1 + u'y_1' + u'y_1 + uy_1' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'',$$

som vi nu kan indsætte i ODE'en

$$u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + p(u'y_1 + uy_1') + quy_1 = u''y_1 + u'(2y_1' + py_1) + u(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0,$$

hvor vi ser, at da y_1 er en løsning, er sidste parentes 0. Dette betyder, at u kun indgår som første- og andenafledede:

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1) = 0.$$

Vi dividerer nu med y_1 og sætter $v = u'$:

$$v' + \Big(\frac{2y_1'}{y_1} + p\Big)v = 0,$$

som er den ordensreducerede form. Igen separerer vi:

$$\frac{1}{v}v' = -\Big(\frac{2y_1'}{y_1} + p\Big)$$

som vi integrerer og tager eksponent af,

$$\ln|v| = -2\ln|y_1| - \int p(x)\,\mathrm{d}x, \qquad |v| = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Vi vælger den positive løsning

$$v_1 = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x},$$

integrerer igen og ganger med y_1:

$$u = \int v_1(x)\,\mathrm{d}x, \qquad y_2 = y_1 u = y_1 \int v_1(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vi bemærker, at da v_1 er positiv, så er $\int v(x)\,\mathrm{d}x$ voksende, og altså ikke konstant, så y_1 og y_2 er lineært uafhængige. Pr. konstruktion er y_2 en løsning.

2 Homogene lineære ODE'er med konstante koefficienter

[Bogens afsnit 2.2, side 53]

2.1 Problemet i en nøddeskal

Indtil videre kan vi håndtere generelle homogene lineære ODE'er, såfremt vi kan finde blot én løsning. Hvis vi snævrer os ind til homogene lineære ODE'er med konstante koefficienter, altså $p \equiv a$ og $q \equiv b$ eller

$$y'' + py' + qy = y'' + ay' + by = 0$$

hvor a og b er reelle konstanter, så viser det sig, at vi kan klare alt. Som bekendt (eller, hvis det ikke er jer bekendt, så som følge af løsningsformlen fra sidste lektion) er $x \mapsto ce^{-kx}$ en løsning til følgende førsteordens homogene lineære ODE:

$$y' + ky = 0.$$

Det kunne derfor være interessant at se, hvordan $y_0(x) = e^{\lambda x}$ klarer sig i det aktuelle setup. Vi forsøger at sætte ind:

$$y_0'' + ay_0' + by_0 = \lambda^2 y_0 + a\lambda y_0 + by_0 = (\lambda^2 + a\lambda + b)y_0 = 0 \tag{3}$$

hvilket oplagt kræver, at $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ (idet $y_0 \neq 0$). Vi skal med andre ord til at bruge, hvad vi ved om andengradspolynomier. Vi deler op i de tre tilfælde:

2.2 Positiv diskriminant: $a^2 - 4b > 0$ og dermed to rødder

Hvis $a^2 - 4b > 0$ (bemærk, at polynomierne ikke er på formen $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ men i stedet $1 \cdot \lambda^2 + a\lambda + b = 0$) har vi to reelle rødder $\lambda_\pm = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$, og $x \mapsto e^{\lambda_\pm x}$ udgør derfor to lineært uafhængige løsninger, idet

$$c_1 e^{\lambda_+ x} + c_2 e^{\lambda_- x} = 0$$

betyder at

$$c_1 e^{(\lambda_+ - \lambda_-)x} = -c_2$$

hvilket tydeligvis kun kan lade sig gøre for $c_1 = c_2 = 0$ (vi behøver ikke tjekke efter, at de er løsninger, det følger jo af (3)).

2.3 Diskriminanten er 0: $a^2 - 4b = 0$ og dermed én dobbeltrod

Hvis $a^2 - 4b = 0$, så er $\lambda_0 = \frac{-a}{2}$ en dobbeltrod, og vi har kun én løsning. Frygt ej! Vi har jo en metode ved navn reduktion af orden til at finde en anden lineært uafhængig løsning. Anvender vi den metode på vores kendte løsning $x \mapsto e^{-\frac{ax}{2}}$, så får vi den anden løsning til at være

$$x \mapsto xe^{-\frac{ax}{2}}.$$

Tror man det ikke, har man følgende tre muligheder:

1. Sæt ind i ODE'en og se, at det er en løsning!
2. Benyt selv reduktion af orden-metoden med $x \mapsto e^{-\frac{ax}{2}}$ som input og få lidt træning i metoden gratis med i købet!
3. Tjek de slibrige detaljer i bogen. Denne mulighed er den kedelige.

2.4 Negativ diskriminant: $a^2 - 4b < 0$ og ingen reelle rødder

En negativ diskriminant svarer til, at løsningerne er komplekse. Der findes nogle formler kaldet Eulers formler, som fortæller os, at komplekse eksponentialfunktioner har noget med $\sin$ og $\cos$ at gøre. Kort fortalt giver de $\sin$ og $\cos$ som linearkombinationer af komplekse eksponentialfunktioner. Idet $a^2 - 4b < 0$, så er

$$\lambda_{\pm i} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = -\frac{a}{2} \pm i\omega$$

de to komplekse rødder, hvor $\omega^2 = b - \frac{1}{4}a^2$. Set i lyset af Eulers formler, skulle det derfor ikke komme bag på jer, at

$$y_1(x) = e^{-\frac{ax}{2}} \cos(\omega x) \qquad \text{og} \qquad y_2(x) = e^{-\frac{ax}{2}} \sin(\omega x)$$

er to lineært uafhængige løsninger. I har ikke haft tilstrækkeligt med kompleks funktionsteori til at få et ordentligt argument, men igen har I et par muligheder:

1. Tjek efter, at de to påståede løsninger rent faktisk *er* løsninger!
2. Lad som om I har styr på kompleks funktionsteori og anvend Eulers formler i blind vildskab. Har I brikkerne på plads og/eller heldet med jer, vil I nå frem til ovenstående resultat som værende blandt de mulige reelle uafhængige løsninger.

2.5 Opsummering

Vi har påstået, at vi nu i tilfældet andenordens homogene lineære ODE'er med konstante koefficienter kan klare alt. For nu må I nøjes med at tro på, at det er tilstrækkeligt at kende to uafhængige løsninger og herudover benytte Sætning 1.2 til at danne vilkårlige linearkombinationer. Næste gang vil I se, at det er tilstrækkeligt. Vi vil vende tilbage til de tre netop behandlede scenarier om lidt, hvor vi tolker dem som forskellige typer løsninger til et dæmpet masse-fjeder-system.

3 Differentialoperatorer

[Bogens afsnit 2.3, side 60]

3.1 Differentialligninger i et abstrakt setup

En lineær operator er en afbildning mellem vektorrum, som respekterer linearkombinationer. Disse vektorrum er normalt – som i vores tilfælde – funktionsrum. Idet $(ay_1 + by_2)' = ay_1' + by_2'$, hvis a og b er konstanter, kan vi altså betragte differentiering D givet ved $Dy = y'$ som en lineær operator. Idet start- og slutvektorrummet er det samme funktionsrum (hvis vi ikke bliver alt for pernitne), så kan man anvende D to (eller flere) gange på samme vektor:

$$DDy = Dy' = y''.$$

Det giver derfor mening at skrive $P(D)$, hvor P er et polynomium, og $D^0 = I$ er identitetsoperatoren $Iy = y$. Tolkes foregående afsnit i disse termer, kan man altså betragte en andenordens homogen lineær ODE som $P(D)y = 0$ for $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ og opsplitningen i rødder og løsninger kan ses som en faktorisering af polynomiet.

4 Oscillationer i et masse-fjeder-system

[Bogens afsnit 2.4 på side 62]

4.1 Det udæmpede system

En fjeder, som er spændt fast i loftet og har en kugle hængede for enden, kan modelleres med formlen

$$my'' + ky = 0,$$

hvor $m > 0$ er massen af kuglen og $k > 0$ er fjederkonstanten fra Hooke's lov. Den generelle løsning er selvfølgelig på formen

$$y(t) = A\cos\big(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t\big) + B\sin\big(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t\big) = C\cos\big(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t - \delta\big), \qquad C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan(\delta) = \frac{B}{A},$$

jævnfør løsningsformlen for andenordens homogene lineære ODE'er og en anvendelse af additionsformlerne for trigonometriske funktioner, altså et oscillerende system.

4.2 Det samme – men med dæmpning

Vi modellerer nu en dæmpning ved $-cy'$, $c > 0$ og får ODE'en

$$my'' + cy' + ky = 0.$$

Vi ser, at vi skal løse andengradspolynomiet

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

og får rødderne $\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$ og $\lambda_1 = -\frac{c}{2m} - \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$, som begge nødvendigvis er ikke-positive, idet $c^2 - 4mk < c^2$. Diskriminantens fortegn afgør nu resultatet:

- $c^2 > 4mk$: Den generelle løsning har formen $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, og er altså en sum af to eksponentielt aftagende funktioner. Ingen oscillation!
- $c^2 = 4mk$: Den generelle løsning har formen $y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda_1 t}$, og er altså en sum af en eksponentielt aftagende funktion og en skalering af samme funktion ganget t. Den kan være heldig at krydse nulpunktet en enkelt gang, men ingen oscillation!
- $c^2 < 4mk$: Den generelle løsning har formen $y(t) = Ce^{-\frac{ct}{2m}}\cos\big(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}t - \delta\big)$ og er altså en eksponentielt aftagende, men oscillerende løsning!

For uddybning refereres til bogen.