

# Matematisk modellering og numeriske metoder

## Lektion 5

Morten Grud Rasmussen

25. september 2015

### 1 Euler-Cauchy-ligninger

[Bogens afsnit 2.5, side 71]

#### 1.1 De tre typer af Euler-Cauchy-ligninger

Efter at have beskæftiget os med andenordens homogene lineære ODE'er med konstante koefficienter, går vi i gang med en bestemt type andenordens homogene lineære ODE'er med variable koefficienter, nemlig de såkaldte *Euler-Cauchy-ligninger*, som er ODE'er af typen

$$x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0,$$

hvor  $a$  og  $b$  er konstanter. Som før i lignende situationer prøver vi først ad med en simpel funktion, som ligner koefficienterne, nemlig  $f(x) = x^m$ :

$$\begin{aligned}x^2 f''(x) + axf'(x) + bf(x) &= x^2 m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m \\ &= x^m(m(m-1) + am + b) \\ &= x^m(m^2 + (a-1)m + b),\end{aligned}$$

som i hvert fald er 0, hvis andengradspolynomiet i  $m$ ,  $m^2 + (a-1)m + b$ , er 0. Som i tilfældet med konstante koefficienter skal vi altså betragte tre tilfælde, nemlig to reelle, én reel dobbelt- og to komplekse rødder. Determinanten er  $d = (a-1)^2 - 4b$ , så det svarer til:

**Positiv diskriminant:**  $(a-1)^2 - 4b > 0$  og to reelle rødder

De to rødder er givet ved  $m_{\pm} = \frac{1-a}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a-1)^2 - b}$ , og to lineært uafhængige løsninger er derfor

$$y_+(x) = x^{m_1} \quad \text{og} \quad y_-(x) = x^{m_2}.$$

Alle andre løsninger findes således ved linearkombinationer af disse to.

## Diskriminanten er 0: $(a - 1)^2 - 4b = 0$ og én dobbeltrod

Dobbeltroden er givet ved  $m_0 = \frac{1-a}{2}$  som svarer til løsningen

$$y_0(x) = x^{\frac{1-a}{2}},$$

og en anden løsning kan nu findes vha. metoden reduktion af orden. Først skal ODE'en bringes på standardform (ellers dur formlen ikke):

$$y''(x) + \frac{a}{x}y'(x) + \frac{b}{x^2}y(x) = y''(x) + \frac{a}{x}y'(x) + \frac{(a-1)^2}{4x^2}y(x) = 0,$$

hvor  $b = \frac{(a-1)^2}{4}$ , da determinanten var antaget lig nul. Følger man nu metoden slavisk (og regner rigtigt), kommer man frem til, at  $u(x) = \ln|x|$  (afhængig af konstantvalg undervejs kan det være, at man i stedet har fået  $\tilde{u} = c_1u + c_2$ , men det er ligegyldigt, så længe  $c_1 \neq 0$ ). Reduktion af orden giver således den af  $y_0$  lineært uafhængige løsning

$$y_r(x) = \ln|x|x^{\frac{1-a}{2}},$$

og alle andre løsninger kan findes som linearkombinationer af  $y_0$  og  $y_r$ .

## Negativ diskriminant: $(a - 1)^2 - 4b < 0$ og to komplekse rødder

Her er rødderne  $m_{\pm i} = \frac{1-a}{2} \pm i\sqrt{b - \frac{1}{4}(a-1)^2}$ , og skal vi finde en løsning, skal vi således igen til at lege med Eulers formler og være lidt på matematisk tynd is (vi har ikke de rigtige argumenter). Fifler man tilstrækkeligt længe, når man frem til, at

$$y_{\cos}(x) = x^{\frac{1-a}{2}} \cos\left(\sqrt{b - \frac{1}{4}(a-1)^2} \ln(x)\right) \quad \text{og} \quad y_{\sin}(x) = x^{\frac{1-a}{2}} \sin\left(\sqrt{b - \frac{1}{4}(a-1)^2} \ln(x)\right)$$

er to lineært uafhængige løsninger. Det er dog ikke tilfældigt, hvis I ikke har set  $\sin \circ \ln$  eller  $\cos \circ \ln$  før: problemer med disse løsninger optræder sjældent i praksis.

## 2 Eksistens og entydighed samt konsekvenser heraf

[Bogens afsnit 2.6, side 74]

### 2.1 Eksistens og entydighed for andenordens homogene lineære ODE'er

Vi så i lektion 3, at der var eksistens og entydighed af løsninger under visse betingelser for førsteordens-ODE'er. Noget tilsvarende gør sig gældende i tilfældet andenordens homogene lineære differentialligninger

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0. \quad (1)$$

Som i førsteordenstilfældet er eksistens- og entydighedssætningerne bundet op på et IVP, dvs. vi skal have fat i en IC som i andenordenstilfældet ser ud som følger:

$$y(x_0) = K_0 \quad \text{og} \quad y'_0(x_0) = K_1 \quad (2)$$

Vi kan nu formulere sætningen:

**Sætning 2.1** (Bogens Theorem 1 på side 74). Hvis koefficientfunktionerne  $p$  og  $q$  er kontinuerte på det åbne interval  $I$  og  $x_0 \in I$ , så eksisterer der netop én løsning til IVP'et givet ved (1) og (2).

Beviset er udenfor dette kursus' afgrænsning. Det er konsekvenserne af sætningen dog ingenlunde, og vi vil om lidt se indtil flere meget vigtige konsekvenser af denne sætning, inkl. sidste lektions påstand om, at når vi havde fundet to lineært uafhængige løsninger, så kan vi finde resten ved linearkombinationer.

Vi vil nu vise følgende proposition:

**Proposition 2.2.** To løsninger  $y_1$  og  $y_2$  til ODE'en (1) defineret på samme interval  $I$  er lineært uafhængige hvis og kun hvis

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \end{pmatrix}$$

er lineært uafhængige for alle  $x_0 \in I$ .

*Bevis.* Bemærk, at  $y_0 \equiv 0$  er en løsning for alle homogene, lineære ODE'er og lineært afhængig af alle andre løsninger. Antag nu, at  $y_1$  og  $y_2$  er to lineært uafhængige løsninger til IVP'et givet ved (1) og (2), hvor  $p$  og  $q$  er kontinuerte. Vælg et punkt  $x_0 \in I$ . Vi viser først, at vi ikke kan have  $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$ :

**Påstand 1:**  $y_1(x_0)$  og  $y_2(x_0)$  kan ikke samtidigt være 0. Hvis  $y_1(x_0) = 0$ , så er  $y_1'(x_0) \neq 0$  da vi pr. entydighed ellers havde, at  $y_1 = y_0$ , som ikke kan være lineært uafhængig af andre løsninger. Det samme gælder for  $y_2$ . Vi har altså, at hvis  $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$ , så er  $y_1'(x_0) \neq 0$  og  $y_2'(x_0) \neq 0$ . Sæt nu  $a = \frac{y_2'(x_0)}{y_1'(x_0)}$ . Så er

$$ay_1(x_0) = y_2(x_0) \quad \text{og} \quad ay_1'(x_0) = \frac{y_2'(x_0)}{y_1'(x_0)}y_1'(x_0) = y_2'(x_0),$$

og  $ay_1$  og  $y_2$  er pr. entydighed identiske. Dette er i modstrid med antagelserne om uafhængighed. Altså må der være noget i vejen med antagelsen om, at  $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$ .  $\diamond$

Vi kan konkludere, at mindst ét af tallene  $y_1(x_0)$  og  $y_2(x_0)$  er forskelligt fra 0. Om  $y_1(x_0) \neq 0$  eller  $y_2(x_0) \neq 0$  er ligegyldigt, så vi antager, at  $y_1(x_0) \neq 0$  og bytter blot rundt på  $y_1$  og  $y_2$ , hvis det ikke er tilfældet. Vi vil nu vise følgende:

**Påstand 2:** Hvis  $y_1(x_0) \neq 0$ , så er  $ay_1(x_0) = y_2(x_0)$  og  $ay_1'(x_0) = y_2'(x_0)$  for  $a = \frac{y_2(x_0)}{y_1(x_0)}$ . Vi ser først at

$$ay_1(x_0) = \frac{y_2(x_0)}{y_1(x_0)}y_1(x_0) = y_2(x_0),$$

men hvis vi så har, at  $ay_1'(x_0) = y_2'(x_0)$ , så vil  $ay_1$  og  $y_2$  være samme løsning jf. entydigheden. Dette er i modstrid med antagelsen om uafhængighed.  $\diamond$

Antag nu, at der findes to tal  $c_1$  og  $c_2$ , ikke begge lig 0, så

$$c_1 \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Specielt er

$$c_1y_1(x_0) = -c_2y_2(x_0). \quad (4)$$

Påstand I betyder som sagt, at vi kan antage, at  $y_1(x_0) \neq 0$ . Men så giver Påstand II os at

$$ac_1y_1(x_0) = c_1y_2(x_0) = -ac_2y_2(x_0),$$

så enten er  $y_2(x_0) = 0$ , eller også er  $a \neq 0$  og  $ac_2 = c_1$ . Antag først, at  $y_2(x_0) = 0$ . Så giver Påstand I og (4), at  $c_1 = 0 = a$  og samtidig, at  $y_2'(x_0) \neq ay_1'(x_0) = 0$ , så (3) kan ikke være opfyldt, med mindre også  $c_2 = 0$ , i modstrid med antagelsen.

Vi mangler nu kun tilfældet  $y_2(x_0) \neq 0$  hvor altså  $a \neq 0$  og  $-ac_2 = c_1$ , hvilket kort kan skrives  $a = -\frac{c_1}{c_2} \neq 0$  (grundet antagelsen om, at ikke både  $c_1$  og  $c_2$  er 0 giver  $-ac_2 = c_1$  og  $a \neq 0$  først, at de begge må være forskellige fra 0, og vi kan herefter dividere med  $c_2$ ). I dette tilfælde kan (3) reduceres til

$$a \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

hvilket er i modstrid med Påstand II. Det var den første halvdel af sætningen, nemlig, at lineær uafhængighed af løsningerne medfører lineær uafhængighed af

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Anden halvdel af sætningen, nemlig at afhængighed af løsningerne medfører afhængighed af (5) for alle  $x_0 \in I$ , er heldigvis lettere. Antag nu, at  $y_1$  og  $y_2$  er to lineært afhængige løsninger og at  $c_1$  og  $c_2$  er de to tal, ikke begge 0, så  $c_1y_1 + c_2y_2 \equiv 0$ . Så er også  $c_1y_1' + c_2y_2' \equiv 0$ . Evaluerer vi nu disse to funktionsudtryk i et punkt  $x_0$ , så følger det, at også  $c_1 \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .  $\square$

Da lineær uafhængighed af to vektorer i  $\mathbb{R}^2$  reducerer til at determinanten af matricen, der har de to vektorer som søjler, er forskellig fra 0, får vi følgende korollar til Proposition 2.2:

**Korollar 2.3** (Bogens Theorem 2 på side 75). *To løsninger  $y_1$  og  $y_2$  til ODE'en  $y'' + py' + qy = 0$ , hvor  $p$  og  $q$  er kontinuerte på et åbent interval  $I$ , er lineært uafhængige såfremt deres såkaldte Wronski-determinant*

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

*er forskellig fra 0 i ét (og dermed alle)  $x_0 \in I$ . Omvendt er  $W(y_1, y_2) \equiv 0$  for afhængige  $y_1$  og  $y_2$ .*

Bemærk, at  $W(y_1, y_2)$  er en funktion:  $W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$ . Vi er dog så heldige, at enten er den identisk 0, eller også er den aldrig 0.

*Bevis.* Det er stort set bare en omformulering af Proposition 2.2 jf. bemærkningen over korollaret. Vi knytter dog lige en kommentar til dét med, at hvis Wronski-determinanten er forskellig fra 0 i ét punkt  $x_0$ , så er den det overalt. Vi konstaterer, at hvis  $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ , så kan vi ikke have, at  $c_1y_1 + c_2y_2 \equiv 0$  med mindre at  $c_1 = c_2 = 0$ , fordi vi ellers også ville have, at  $c_1y_1' + c_2y_2' \equiv 0$  og dermed ville vi specielt have at  $c_1 \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Og hvis dette er tilfældet, så er også  $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$ .  $\square$

Vi er slet ikke færdige med at drage konklusioner af Proposition 2.2 og Sætning 2.1:

**Korollar 2.4** (Bogens Theorem 3 og 4 på side 77 og 78). Hvis  $p$  og  $q$  er kontinuerte på det åbne interval  $I$ , så har ODE'en  $y'' + py' + qy = 0$  to lineært uafhængige løsninger  $y_1$  og  $y_2$  defineret på  $I$ . Hvis  $y_1$  og  $y_2$  er lineært uafhængige løsninger på  $I$ , så kan alle andre løsninger skrives på formen

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Ydermere er alle  $y$  på ovenstående form en løsning.

*Bevis.* Vi begynder nedefra med at konstatere, at vi allerede sidste gang så, at løsningsrummet er lukket under linearkombinationer, hvilket medfører sidste linje i korollaret.

At vi kan finde to lineært uafhængige løsninger, følger af entydighedssætningen, hvor vi vælger et  $x_0$  og begyndelsesbetingelserne  $y_1(x_0) = 1$  og  $y_1'(x_0) = 0$  samt  $y_2(x_0) = 0$  og  $y_2'(x_0) = 1$ , som giver Wronski-determinanten  $W(y_1, y_2)(x_0) = 1 \neq 0$ .

Lad  $y_1$  og  $y_2$  være tilfældige, lineært uafhængige løsninger og  $y$  en vilkårlig løsning, vi gerne vil skrive på formen  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ . Vi skal blot løse følgende lineære ligningssystem i variablene  $c_1$  og  $c_2$

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \end{pmatrix}$$

som har en entydig løsning da matricens determinant er Wronski-determinanten i  $x_0$  og dermed forskellig fra 0 jf. Korollar 2.3, og matricen er dermed invertibel. Sætter vi nu  $\tilde{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2$  har vi, at  $\tilde{y}$  er en løsning,  $\tilde{y}(x_0) = y(x_0)$  og  $\tilde{y}'(x_0) = y'(x_0)$ , så pr. entydighed er  $\tilde{y} = y$  som ønsket.  $\square$

Næstsidste korollar:

**Korollar 2.5.** Andenordens homogene lineære ODE'er med kontinuerte koefficientfunktioner har todimensionelle løsningsrum.

## 3 Andenordens ikke-homogene lineære ODE'er

[Bogens afsnit 2.7 på side 79]

### 3.1 Generelle og partikulære løsninger

Genkalder vi os beviset for, at summer og skaleringer af løsninger til homogene lineære ODE'er igen er løsninger, så mindes vi, at det hele koges ned til, at højresiden er 0:  $0 + 0 = 0$  og  $a \cdot 0 = 0$ . Vi ødelægger nu *alt* (næsten da) i dét argument ved at betragte ikke-homogene andenordens lineære ODE'er:

$$y'' + py' + qy = r \tag{6}$$

hvor  $p$ ,  $q$  og  $r$  er (normalt kontinuerte) funktioner, og  $r \neq 0$ . Det parentesiske "næsten da" er selvfølgelig ikke så parentesisk, når det kommer til stykket, idet regnestykker som  $0 + r = r$  og  $a \cdot 0 + r = r$  giver anledning til begreberne *partikulære* og *generelle* løsninger:

**Definition 3.1** (Bogens Definition på side 80). En konkret løsning  $y_p$  på et interval  $I$  til ODE'en (6) kaldes en *partikulær* løsning. Hvis ydermere  $y_1$  og  $y_2$  er lineært uafhængige løsninger på  $I$  til den tilsvarende *homogene* andenordens lineære ODE (1) på side 2, så kaldes

$$y_g = y_p + c_1y_1 + c_2y_2$$

en *generel* løsning.

Lad  $L$  betegne den lineære operator givet ved

$$L(y)(x) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x).$$

Så kan (6) og (1) skrives hhv.

$$L(y) = r \quad \text{og} \quad L(y) = 0.$$

Med denne notation på plads viser vi hurtigt følgende:

**Sætning 3.2** (Bogens Theorem 1, side 80). *En generel løsning er en løsning til (6), og differensen mellem to partikulære løsninger til (6) er en løsning til (1).*

*Bevis.* Lad  $y_g = y_p + c_1y_1 + c_2y_2$  være en generel løsning. Så er

$$L(y_g) = L(y_p) + c_1L(y_1) + c_2L(y_2) = r + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = r,$$

og  $y_g$  løser altså (6). Omvendt, lad  $y_p$  og  $\tilde{y}_p$  være to forskellige løsninger til (6). Så er

$$L(y_p - \tilde{y}_p) = L(y_p) - L(\tilde{y}_p) = r - r = 0$$

og  $y_p - \tilde{y}_p$  løser altså (1). □

Sidste korollar i følgen af korollarer, der fulgte Proposition 2.2 på side 3 er:

**Korollar 3.3** (Theorem 2, side 80). *Lad  $p$ ,  $q$  og  $r$  være kontinuerte og  $y_p$ ,  $y_1$  og  $y_2$  være som i Definition 3.1. Da kan enhver løsning skrives som en generel løsning*

$$y_g = y_p + c_1y_1 + c_2y_2$$

for passende valg af  $c_1$  og  $c_2$ .

*Bevis.* Lad  $\tilde{y}_p$  være en løsning, som vi vil skrive på formen  $\tilde{y}_p = y_g = y_p + c_1y_1 + c_2y_2$ . Da er

$$\tilde{y}_p = y_p + (\tilde{y}_p - y_p) = y_p + c_1y_1 + c_2y_2$$

idet  $\tilde{y}_p - y_p$  er en løsning til den homogene ODE jf. Sætning 3.2, som kan skrives på formen  $c_1y_1 + c_2y_2$  jf. Korollar 2.4. □

## 3.2 Stabilitet af løsninger for ODE'er med konstante koefficienter

Sidste gang så vi på løsninger af andenordens *homogene* lineære ODE'er med *konstante koefficienter* og viste, at det at finde løsninger svarede til at finde rødder i det tilhørende karakteristiske polynomium. Vi bemærkede også, at disse løsninger konvergerede mod 0 for  $x \rightarrow \infty$  hvis og kun hvis rødderne var negative eller havde negativ realdel. Dette betyder i det ikke-homogene tilfælde, at  $y_g$  konvergerer mod  $y_p$  for  $x \rightarrow \infty$ , hvis og kun hvis rødderne i det karakteristiske polynomium er negative eller har negativ realdel. Er det tilfældet, kaldes ODE'en *stabil*, mens den i det modsatte fald kaldes *ustabil*.

### 3.3 De ubestemte koefficienters metode

Vi vil nu se på en relativt nem og hurtig – men ikke nødvendigvis skudsikker – metode til at finde løsninger til andenordens ikke-homogene lineære ODE'er *med konstante koefficienter*, dvs. ODE'er på formen

$$y'' + ay' + by = r, \quad (7)$$

hvor  $a$  og  $b$  er konstanter og  $r$  er en kontinuert funktion. Vi har så småt diskuteret den i specialtilfælde, men vil nu gøre det mere systematisk. Det handler om at gætte kvalificeret på en løsning. For at være konkret kommer her en tabel samt en opskrift på at bruge den.

Led i $r(x)$	Valg af led i $y_p(x)$
$ke^{\gamma x}$	$Ce^{\gamma x}$
$kx^n$ ( $n \in \mathbb{N}$ )	$K_n x^n + K_{n-1} x^{n-1} + \dots + K_1 x^1 + K_0$
$k \sin(\omega x)$	$K \cos(\omega x) + M \sin(\omega x)$
$k \cos(\omega x)$	
$ke^{\alpha x} \cos(\omega x)$	$e^{\alpha x} (K \cos(\omega x) + M \sin(\omega x))$
$ke^{\alpha x} \sin(\omega x)$	

Metoden går ud på at gøre følgende: Hvis  $r$  kan skrives som en sum af funktioner fra venstre side i ovenstående tabel, så vælges  $y_p$  som summen af de tilsvarende udtryk på højresiden i tabellen. Kald funktionerne i  $y_p$ -summen  $f_i$ , så  $y_p = \sum_{i=1}^n f_i$ . Sæt nu  $L = D^2 + aD + bI$ , så (7) kan skrives som

$$L(y) = r$$

Hvis  $L(f_i) = 0$ , så erstat  $f_i$  med funktionen  $\tilde{f}_i: x \mapsto x f_i(x)$ . Er også  $L(\tilde{f}_i) = 0$  ( $f_i$  svarer til en dobbeltrod), så erstat med  $x \mapsto x^2 f_i(x)$ . Til sidst bestemmes koefficienterne i  $f_i$ 'erne ( $C, K, M$  og  $K_1, \dots, K_n$ ). Metoden er illustreret i bogens Example 1, 2 og 3 på siderne 82–84.