

Matematisk modellering og numeriske metoder

Opgaver til Lektion 11

Morten Grud Rasmussen

2. oktober 2014

Opgave 1

[Bogens opgave 12.4.5]

Tegn løsningen til den én-dimensionelle bølgeligning på intervallet $[0, 1]$ med $c^2 = \frac{T}{\rho} = 1$ til forskellige faste tidspunkter (eksempelvis $t = 0.1, t = 0.2, t = 0.3$ osv.), når begyndeshastigheden er 0 og udsvinget i $t = 0$ er $u(x, 0) = \sin(\pi x)$.

Opgave 2

[Bogens opgave 12.4.19]

ADVARSEL: Svær opgave! Se evt. vink til opgaven på sidste års hjemmeside – eller kast jer over uløste opgaver fra tidligere. Dette er en øvelse udi produktmetoden. Betragt den én-dimensionelle bølgeligning $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, men med randbetingelsen $u(0, t) = 0$ (som før) og $u_x(L, t) = 0$ (ikke som før). Vis, at hvis begyndeshastigheden er 0, mens begyndelsesudsvinget er $u(x, 0) = f(x)$ (bemærk, at dette medfører, at f må opfylde, at $f'(L) = 0$), så er

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n+1}{2L}x\right) \cos\left(\frac{2n+1}{2L}ct\right),$$

hvor

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2n+1}{2L}x\right) dx$$

en løsning. (Nu kommer det svære:) Vis, at alle løsninger har denne form.