Matematisk modellering og numeriske metoder
Opgaver til Lektion 13

Morten Grud Rasmussen

9. november 2015

Opgave 1

[Bogens opgave 9.8.5]
Udregn divergensen af vektorfeltet $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ givet ved $v(x,y,z) = (x^2yz, xy^2z, xyz^2)$ og find værdien i punktet $P = (-1,3,-2)$.

Opgave 2

[Bogens opgave 9.8.11]
Vis, at strømningen givet ved hastighedsvektorfeltet $v(x,y,z) = (y,0,0)$ er inkompressibelt. Hvor er partiklerne, som til tiden $t = 0$ er i kuben $[0,1] \times [0,1] \times [0,1] = \{(x,y,z) \,|\, 0 \leq x,y,z \leq 1\}$, til tiden $t = 1$?

Opgave 3

[Bogens opgave 9.8.13]
Hastighedsvektorfeltet for en inkompressibel væske, som roterer i en cylindrisk beholder er på formen $v(r) = w \times r$, hvor $r = (x,y,z)$ og w er den konstante rotationsvektor. Vis, at $\mathrm{div}(v) = 0$. Er dette forventeligt?

Opgave 4

[Bogens opgave 9.9.3]
Bevis noterne til lektion 7's Sætning 2.5.

Opgave 5

[Bogens opgaver 9.9.5 og 9.9.7]
Find rotationen af følgende vektorfelter:

1. $v(x, y, z) = (x^3yz, xy^3z, xyz^3)$
2. $v(x, y, z) = (0, 0, e^{-x}\sin(y))$

Opgave 6

[Bogens opgaver 9.9.9 og 9.9.11]
Et fluidum bevæger sig i en konstant strømning, som er givet ved hastighedsvektorfeltet v. Find i følgende to tilfælde ud af, om v er ikke-roterende og inkompressibelt. Tegn strømlinjer for partiklerne i fluidummet.

1. $v(x, y, z) = (0, 3z^2, 0)$
2. $v(x, y, z) = (y, -2x, 0)$

Opgave 7

[Bogens opgave 9.9.14]
Vis, at hvis u, v og f er tilpas differentiable, hvor u og v er vektorfelter og f er en funktion, så gælder følgende identiteter:

1. $\mathrm{curl}(u + v) = \mathrm{curl}(u) + \mathrm{curl}(v)$
2. $\mathrm{div}(\mathrm{curl}(v)) = 0$
3. $\mathrm{curl}(fv) = \mathrm{grad}(f) \times v + f\,\mathrm{curl}(v)$
4. $\mathrm{curl}(\mathrm{grad}(f)) = 0$
5. $\mathrm{div}(u \times v) = v \cdot \mathrm{curl}(u) - u \cdot \mathrm{curl}(v)$

Opgave 8

[Bogens opgave 9.9.15 og 9.9.19]
Lad $u(x, y, z) = (z, x, y)$, $v(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)$ og $g(x, y, z) = x + y + z$. Udregn følgende:

1. $\mathrm{curl}(v + u)$
2. $\mathrm{curl}(u + v)$
3. $\mathrm{curl}(gu)$
4. $\mathrm{curl}(gu + v)$