

Matematisk modellering og numeriske metoder

Opgaver til Lektion 5

Morten Grud Rasmussen

25. september 2015

Opgave 1

[Bogens opgave 2.4.5]

Hvad er vibrationsfrekvenserne for et masse-fjeder-system, hvor massen er 5 kg og

1. fjederen har en fjederkonstant $k_1 = 20$ N/m
2. fjederen har en fjederkonstant $k_2 = 45$ N/m
3. begge fjedre ovenfor er monteret, den ene inden i den anden.¹

Opgave 2

[Bogens opgave 2.5.5]

Find en generel løsning til ODE'en $4x^2y''(x) + 5y(x) = 0$.

Opgave 3

[Bogens opgave 2.5.1]

Antag, at $b = \frac{1}{4}(a-1)^2$, så $m^2 + (a-1)m + b = 0$ har en dobbeltrod i $\frac{1-a}{2}$. Vis ved direkte udregning, at $x^2y''(x) + axy'(x) + by = 0$ i dette tilfælde har løsningen $x \mapsto x^{\frac{1-a}{2}} \ln(x)$.

Antag nu, at $b \neq \frac{1}{4}(a-1)^2$, så $m^2 + (a-1)m + b = 0$ har to forskellige rødder, r_- og r_+ . Vis ved direkte udregning, at $x \mapsto x^{r_{\pm}} \ln(x)$ ikke er en løsning til $x^2y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0$.

Opgave 4

[Bogens opgave 2.6.3]

Find Wronski-determinanten af $f: x \mapsto e^{-0.4x}$ og $g: x \mapsto e^{-2.6x}$. Vis ved direkte udregning, at f og g er lineært uafhængige. Vis det derefter vha. Korollar 2.3.

¹I bogen er en tåbelig tegning, som har fjedrene ved siden af hinanden. Dette er blot til almindelig forvirring, da et sådant system vil trække skævt, og næppe kun vil bevæge sig langs en vertikal akse.

Opgave 5

[Bogens opgave 2.6.11]

1. Find en andenordens homogen, lineær ODE, som har $f: x \mapsto e^{-2.5x} \cos(0.3x)$ og $g: x \mapsto e^{-2.5x} \sin(0.3x)$ som løsninger.
2. Vis, at f og g er lineært uafhængige.
3. Find en løsning for den opstillede ODE, som opfylder begyndelsesværdibetingelserne $y(0) = 3, y'(0) = -7.5$.

Opgave 6

[Bogens opgaver 2.7.1 og 2.7.5]

Find generelle løsninger til følgende ODE'er.

1. $y''(x) + 5y'(x) + 4y(x) = 10e^{-3x}$
2. $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = e^{-x} \cos(x)$