Gruppe G3-106

Opgave 112

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er en vilkårlig begrænset reel talfølge. Derudover gælder:

$$b_n = \sup\{a_m | m \geq n\} \text{ og } c_n = \inf\{a_m | m \geq n\}$$

a) Lad λ være en nedre grænse for $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, da vil λ også være en nedre grænse for $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Lad d være en øvre grænse for $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, da er $d \geq b_n \forall n$. Dvs. at $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ er både opadtil og nedadtil begrænset. Lignende argumentation kan bruges til at vise at følgen $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ er begrænset.

■

b) Da b_n er mindste øvre grænse og c_n er største nedre grænse gælder:

$$b_n \geq a_m \;\wedge\; c_n \leq a_m, \;\forall m \geq n \;\Rightarrow b_n \geq c_n$$

■

c) Da b_k er en mindste øvre grænse for alle $\{a_m | m \geq k\}$, vil $b_k \geq b_{k+1}$, da b_{k+1} kun er mindste øvre grænse for $\{a_m | m \geq k+1\} \subset \{a_m | m \geq k\}$. Så hvis a_k er det største element i $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ vil b_k være større end eller lig med b_{k+1}. Ellers vil de være lig hinanden. Dermed er følgen aftagende.

Et bevis for, at $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ er voksende kan vises på lignende måde.

■

d) Jf. sætning 4.17 vil enhver monoton og begrænset talfølge være konvergent. Dvs., at de to grænseværdier eksisterer.

Da $b_n \geq c_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ jf. (b) må $\lim_{n\to\infty} b_n \geq \lim_{n\to\infty} c_n$

■