Opgave 113

Ved divergens mod ∞ er det nok at se på store M. Lad $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en reel talfølge og lad $M_0 \in \mathbb{R}$ være givet. Bevis at $a_n \to \infty$ for $n \to \infty$, hvis og kun hvis

$$\forall M \geq M_0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n > M \tag{1}$$

Bevis. " $\Rightarrow$ "
Antag at $a_n \to \infty$ for $n \to \infty$. Af definition 4.18 fremgår det da, at:

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n > M,$$

og specielt gælder det også for $M \geq M_0$.

" $\Leftarrow$ "
Antag at (1) er sandt. Vi vil nu vise at det er sandt $\forall M \in \mathbb{R}$. Her er der to tilfælde der skal bevises: For $M \geq M_0$ og $\tilde{M} < M_0$.
(i) Når $M \geq M_0$ så, af antagelsen, $a_n > M$ som medfører $a_n > M_0$.
(ii) For $\tilde{M} < M_0$ gælder det, at der findes et $N \in \mathbb{N}$ så $n \geq N \Rightarrow a_n > M_0 > \tilde{M}$.

Da det er sandt at $a_n > M$ for alle $\tilde{M} < M_0$ og $M \geq M_0$ er det sandt for alle $M \in \mathbb{R}$.

∎

Opgave 126

Lad $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en begrænset reel talfølge og lad tallene

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \quad \text{og} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n \tag{2}$$

være defineret som i opgave 112.

(a) Vis at $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ har en delfølge, der konvergerer mod tallet $\limsup_{n\to\infty} a_n$. Vis også, at den har en delfølge, der konvergerer mod $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Det ses, at:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n, \qquad b_n = \sup\{a_m | m \geq n\} \tag{3}$$

Fra dette vides det, at $b_1 = \sup\{a_1, a_2, \ldots\}$. ε_k sættes til at være lig $\frac{1}{k}$. Jf. sætning 3.12 medfører det, at $\exists a_{n_1} \in \{a_n | n \in \mathbb{N}\} : b_1 - \frac{1}{1} < a_{n_1}$ af dette sluttes $b_1 - \frac{1}{1} < a_{n_1} \leq b_1$ og dermed også $b_1 - 1 < a_{n_1} \leq b_1$. Vælg $n_2 > n_1$. Igen vides det, at $\exists a_{n_2} \in \{a_n | n \in \mathbb{N}, n \geq n_1\} : b_{n_1} - \frac{1}{2} < a_{n_2} \leq b_{n_1}$.

Dette generaliseres, således at vi vælger $n_{k+1} > n_k$ så at $\exists a_{n_{k+1}} \in \{a_n | n \in \mathbb{N}, n \geq n_{k+1}\} :$ $b_{n_k} - \frac{1}{k+1} < a_{n_{k+1}}$. Dette vil sige, at: $b_{n_k} - \frac{1}{k+1} < a_{n_{k+1}} \leq b_{n_k}$. Ser vi på $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}$ indser vi, at dette blot er en talfølge, som vi kan fortsætte som delfølgen $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Dermed vil

$$\lim_{k\to\infty} b_{n_k} - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = \lim_{k\to\infty} b_{n_k} - 0 = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Dermed kan vi jf. opgave 90 slutte, at følgen $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ vil gå mod $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, da

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists a_{n_{k+1}} : b_{n_k} - \frac{1}{k+1} < a_{n_{k+1}} \leq b_{n_k}$$

Tilsvarende kan gøres for $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, blot hvor det er vendt således at

$$c_k + \frac{1}{k+1} \geq a_{n_{k+1}} \geq c_k$$

.

■

(b) Slut af (a), at hvis talfølgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent, så er

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n. \tag{4}$$

Vi ved fra (a), at $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ har en delfølge, der konvergerer mod $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ og en delfølge der konvergerer mod $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. Jf. sætning 4.27 vil $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergere mod samme grænseværdi som sine delfølger, hvilket jf. sætning 4.5 betyder at

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

■

(c) Vis, at hvis $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ er en konvergent delfølge af $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, så er

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} a_{n_k} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Lad $\{a_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ være en konvergent delfølge af $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ og lad $c_n = \inf\{a_m | m \geq n\}$. Da delfølgens indeks n_k altid er større end eller lig k, gælder det pr. definition for infimum at $c_k \leq a_{n_k}, \; \forall k \in \mathbb{N}$.

Det vil sige

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} a_{n_k}$$

Tilsvarende argumentation kan benyttes for

$$\lim_{n\to\infty} a_{n_k} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

■

(d) Vis, at hvis $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, så er talfølgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent.

For et givet element, $a_k, k \in \mathbb{N}$ i følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gælder:

$$c_k \leq a_k \leq b_k$$

Jf. klemmelemmaet gælder det, at hvis $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergente med samme grænseværdi, så har $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ligeledes denne grænseværdi. Da $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ er monotone og begrænsede talfølger er disse konvergente jf. sætningn 4.17 og dermed er $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ også konvergent.

■