# Opgave 114

**Bevis for Lemma 4.22 (b)-(d)**

**(b)**
Lad $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en reel talfølge, der divergerer mod $\infty$ og lad $r > 0$. Vis, at $ra_n \to \infty$ for $n \to \infty$.

*Bevis.*
Vi ved, at når $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergerer mod uendelig gælder der ifølge definition 4.18, s. 55, at:

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n > M \tag{1}$$

Lad $M$ være givet. Da vi ved, at ligning (1) omhandler alle $M \in \mathbb{R}$, findes der et $N' \in \mathbb{N}$ der afparerer et $M'$. Der vælges:

$$M' = \frac{1}{r}M \tag{2}$$

Hvilket gør, at der findes et $N'$ der afparerer $\frac{1}{r}$'te del af det givne $M$.
Da $r > 0$ kan dette tillades.
Nu eksisterer der to tilfælde, alt efter værdien for $r$:

1. $a_n > M' \geq M$ for $0 < r \leq 1$
2. $a_n > M \geq M'$ for $r \geq 1$

Under alle omstændigheder gælder det:
$a_n > M' \Leftrightarrow a_n > \frac{1}{r}M \Leftrightarrow ra_n > M$, og (b) er nu bevist.

$\square$

**(c)**
Lad $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ være reelle talfølger, der divergerer mod $\infty$. Vis at $a_n + b_n \to \infty$ for $n \to \infty$.

*Bevis.* Vi ved, at når både $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergerer mod uendelig gælder følgende fra definition 4.18, side 55:

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n > M \tag{3}$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow b_n > M \tag{4}$$

Det skal vises at:

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n + b_n > M \tag{5}$$

Lad $M$ være givet og $N$ afparere $\frac{M}{2}$. Så gælder følgende:

$$a_n > \frac{M}{2} \tag{6}$$

$$b_n > \frac{M}{2} \tag{7}$$

hvilket vil sige, at følgende gælder:

$$a_n + b_n > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$$

Lad $N'$ afparere $M$ i (6) og $N''$ afparere $M$ i (7).
Lad nu $N = \max(N', N'')$. Hermed har vi fundet et $N$, der afparerer $M$ i (5). □

**(d)**
Lad $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ være reelle talfølger således, at $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergerer mod uendelig og $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ er nedad begrænset. Vis, at $a_n + b_n \to \infty$ for $n \to \infty$.

*Bevis.* Vi ved fra definition 4.18, side 55, at når $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergerer mod $\infty$ gælder:

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n > M \tag{8}$$

Og da $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ er nedad begrænset gælder der i følge definition 4.7, at der for delmængden $\{b_n | n \in \mathbb{N}\}$ eksisterer et tal $k \in \mathbb{R}$, således at:

$$k \leq b_n \tag{9}$$

Vi skal vise:

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n + b_n > M \tag{10}$$

Lad $M$ være givet. Der vælges et $N'$, der afparerer $M' = M - k$, så der gælder:

$$a_n > M' = M - k \tag{11}$$

Men $N'$ afparerer ligeledes:

$$a_n + k > M \tag{12}$$

Vi ved, at $b_n$ er nedad begrænset. Da ligning (9) gælder, må følgende også gælde ved at addere $a_n$ på begge sider:

$$a_n + k \leq a_n + b_n \tag{13}$$

Ved at kombinere ligning (12) og ligning (13) sammen fås:

$$M < a_n + k \leq a_n + b_n \Rightarrow M < a_n + b_n \tag{14}$$

Altså findes et $N' \in \mathbb{N}$, der afparerer $M$ i ligning (14). □