**Gruppe 7**

## Delopgave a

Bevis, at

$$|z| > 1 \qquad \Rightarrow \qquad \{z^n\}_{n=1}^{\infty} \text{ er divergent.} \tag{1}$$

*Bevis.* Antag, at $|z| > 1$, da gælder ifølge **Sætning 4.23**, at

$$|z|^n \to \infty \qquad for\ n \to \infty \tag{2}$$

og ifølge **Korollar 2.20** gælder, at

$$|z|^n = |z^n| \tag{3}$$

hvilket medfører, at

$$|z^n| \to \infty \qquad for\ n \to \infty. \tag{4}$$

Jævnfør **Definition 4.7** er $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ ikke begrænset, da

$$\neg(\exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : |z^n| < M) \tag{5}$$

hvilket ifølge **Sætning 4.10** medfører, at $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ ikke er konvergent. □

## Delopgave b

Bevis, at

$$|z| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \{z^n\}_{n=1}^{\infty} \text{ er konvergent med } \lim_{n\to\infty} z^n = 0. \tag{6}$$

*Bevis.* Vi ønsker indledningsvist at bevise, at

$$|z| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad |z|^n \to 0 \qquad \text{for } n \to\ \infty \tag{7}$$

Ifølge **Sætning 4.20** og resultatet i beviset i **Delopgave a** gælder, at

$$\frac{1}{|z|^n} = \left(\frac{1}{|z|}\right)^n \to 0 \qquad \text{for } n \to\ \infty, \qquad |z| > 1. \tag{8}$$

Da $\frac{1}{|z|} < 1$, når $|z| > 1$ gælder også (7).
Ifølge **Korollar 2.20** gælder, at

$$|z|^n = |z^n|. \tag{9}$$

Altså gælder, at

$$|z^n|\ \to\ 0 \qquad \text{for } n\ \to\ \infty, \qquad |z| < 1 \tag{10}$$

hvilket medfører, at

$$z^n\ \to\ 0 \qquad \text{for } n\ \to\ \infty. \tag{11}$$

□

### Delopgave c

Bevis, at

$$z = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \{z^n\}_{n=1}^{\infty} \text{er konvergent med } \lim_{n\to\infty} z^n = 1. \tag{12}$$

*Bevis.* Der gælder for 1, at

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1^n = 1 \tag{13}$$

og dermed kan der konkluderes, at

$$\lim_{n\to\infty} z^n = 1, \qquad z = 1 \tag{14}$$

□

### Delopgave d

Bevis, at

$$|z| = 1 \text{ } og \text{ } z \neq 1 \qquad \Rightarrow \qquad \{z^n\}_{n=1}^{\infty} \text{ er divergent.} \tag{15}$$

*Bevis.* (Modstridsbevis) Antag for modstrid, at $z^n$ konvergerer mod grænseværdien $c$.

$$\lim_{n\to\infty} z^n = c \tag{16}$$

hvilket medfører, at

$$\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = c. \tag{17}$$

Benyt nu differensen $|z^{n+1} - z^n|$ som omskrives med **Korollar 2.20**, **Sætning 2.17** og det faktum, at $|z|^n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} |z^{n+1} - z^n| &= |z^n(z-1)| \\ &= |z^n||z-1| \\ &= |z|^n|z-1| \\ &= |z-1| \end{aligned} \tag{18}$$

Siden $z \neq 1$ ses det, at $|z-1| \neq 0$.

Grænseværdierne for $z^{n+1}$ og $z^n$ indsættes i differensen, og der fås

$$|z^{n+1} - z^n| \to |c - c| = 0 \qquad \text{for } n \to \infty. \tag{19}$$

Desuden haves fra (18)

$$|z^{n+1} - z^n| = |z-1| \not\to 0 \qquad \text{for } n \to \infty \tag{20}$$

og modstrid er opnået, da højresiden ikke går mod 0. □