Opgave 132

Del a)

Bevis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, hvis den har en konvergent hale $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$.

I følge Definition 4.31 for en uendelig række skrives

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \lim_{j \to \infty} s_j,$$

når grænseværdien eksisterer. Da halen konvergerer, kan det skrives

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} t_n$$

hvor

$$t_n = \sum_{j=N+1}^{n} a_j, \ n \geq N+1$$

Givet $n \geq N+1$ gælder

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = s_N + t_n \tag{1}$$

Derfor er $s_n = s_N + t_n$.
s_N er en konstant følge, hvor $s_N = \{s_N\}_{n=1}^{\infty}$, derfor jf. sætning 4.3 er den konvergent og

$$\lim_{n \to \infty} s_N = s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

Da $\lim_{n\to\infty} t_n = t$, fordi den konvergerer, gælder der ifølge definition 4.2

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq N+1 \ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |t_n - t| < \varepsilon \tag{2}$$

Lad $\varepsilon > 0$ og find N, som afparerer jf. (2), så gælder for $n \geq N$:

$$|t_n - t| = |t_n + s_N - s_N - t| = |s_n - (s_N + t)| < \epsilon$$

Dette betyder at:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s_N + t$$

Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er derfor konvergent, hvis den har en konvergent hale $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$

■

Del b)

Bevis, at hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, så er enhver hale $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ ligeledes konvergent.

Lad $N \in \mathbb{N}$ være givet. Sæt så

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \text{ og } t_n = \sum_{k=N+1}^{n} a_k \text{ for } n \geq N+1$$

Så er

$$s_n = s_N + t_n \text{ for } n \geq N+1 \quad \Rightarrow \quad t_n = s_n - s_N$$

Dette betyder, at rækkens hale $\sum_{k=N+1}^{n} a_k$ konvergerer, hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, fordi s_N er en konstantfølge.

■

Del c)

Bevis, at i tilfælde af konvergens gælder der

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n. \tag{3}$$

Fra del b) har vi, at hvis $N \in \mathbb{N}$ er givet så

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \text{ og } t_n = \sum_{k=N+1}^{n} a_k \text{ for } n \geq N+1$$

Så er

$$t_n = -s_N + s_n \text{ for } n \geq N+1 \quad \Rightarrow \quad s_n = t_n + s_N$$

Da $s_n = t_n + s_N$ for alle $n \geq N+1$ og s_n og t_n konvergerer jf. (b), så er $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(s_N + t_n) = s_N + \lim_{n\to\infty} t_n$, som giver (3) som ønsket.

■

Lavet af:
G3-119 (Gruppe 9) og G4-109 (Gruppe 4)