Kapitel 1

Opgave 138 - bevis sætning 4.40

OPGAVEBESKRIVELSE:

Betragt rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$$

hvor $p \in \mathbb{R}_+$.

a) Vis, at den er divergent, hvis $p \leq 1$.
Hint: Sammenlign rækken med den harmoniske række i Eksempel 4.18

b) Vis, at den er konvergent, hvis $p > 1$.
Hint: Betragt afsnitssummer af formen

$$s_{2^m-1} = 1 + \left(2^{-p} + 3^{-p}\right) + \cdots + \left((2^{m-1})^{-p} + (2^{m-1}+1)^{-p} + \cdots + (2^m - 1)^{-p}\right)$$

og argumenter som i Eksempel 4.18 blot omvendt.

Sætning 1: Sætning 4.40

Rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

hvor $p \in \mathbb{R}_+$, er konvergent hvis $p > 1$ og divergent hvis $p \leq 1$.

Følgende opgaver er lavet med inspiration fra den harmoniske række i Eksempel 4.18.

Bevis
a)

Vi sætter $p \leq 1$. Vi skal nu vise at rækken er divergent. Dertil betragter vi afsnitssummerne til numre af formen $n = 2^m$ og skriver dem på følgende form:

$$s_{2^m} = 1^{-p} + \left(2^{-p}\right) + \left(3^{-p} + 4^{-p}\right) + \left(5^{-p} + 6^{-p} + 7^{-p} + 8^{-p}\right) + \cdots \\ + \left((2^{m-1}+1)^{-p} + (2^{m-1}+2)^{-p} + \cdots + (2^m)^{-p}\right) \tag{1.1}$$

Her fås i alt m parenteser. Den k'te af disse parenteser indeholder 2^{k-1} elementer, og hvert enkelt element i denne parentes har en værdi $\geq 2^{-kp}$. Dermed er den samlede værdi af den k'te parentes $\geq 2^{k-1} \cdot 2^{-kp} = 2^{(k-1)-kp}$.

Når vi sætter $p = 1$, som er den maksimale værdi p kan antage ud fra vores antagelse om at $p \leq 1$, giver $2^{(k-1)-kp}$ den mindst mulige værdi. Vi får: $2^{k-1-k\cdot 1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Ud fra dette fås:

$$2^{(k-1)-kp} \geq \frac{1}{2}$$

Da 1= 1^{-p} står udenfor parenteserne, og der er m parenteser hver med en værdi $\geq \frac{1}{2}$, vil værdien af s_{2^m} være:

$$s_{2^m} \geq 1 + m \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}$$

Nu bruger vi **lemma 4.22 punkt a**, som siger at hvis $a_n \to \infty$ for $n \to \infty$ og $b_n \geq a_n$ for $n \in \mathbb{N}$, så medfører det at $b_n \to \infty$ for $n \to \infty$. Kort sagt: Hvis a_n divergerer og kravene er opfyldt, så divergerer b_n også.

Ud fra dette kan vi dermed sige, at fordi $1 + \frac{m}{2} \to \infty$ for $m \to \infty$ og fordi $s_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}$ medfører det at $s_{2^m} \to \infty$ for $m \to \infty$. Da alle leddene er positive, og vi har vist, at delafsnitsfølgen $\{s_{2^m}\}_{m=1}^{\infty}$ divergerer mod ∞, gør rækken også. Dermed har vi bevist, at udtrykket

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

er divergent hvis $p \leq 1$.

b)

Vi vil nu vise, at rækken er konvergent hvis $p > 1$. Vi ser på afsnitssummer af formen $n = 2^m - 1$, og skriver dem som:

$$\begin{aligned} s_{2^m-1} = 1 &+ \left(2^{-p} + 3^{-p}\right) + \left(4^{-p} + 5^{-p} + 6^{-p} + 7^{-p}\right) + \cdots \\ &+ \left((2^{m-1})^{-p} + (2^{m-1}+1)^{-p} + (2^{m-1}+2)^{-p} + \cdots + (2^m-1)^{-p}\right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Her har vi $m-1$ parenteser. Den k'te parentes indeholder 2^k elementer, hvor hver enkelt element er $\leq 2^{-kp}$. Dermed har vi, at den samlede værdi af den k'te parentes er:

$$\leq 2^k \cdot 2^{-kp} = 2^{k-kp} = 2^{k(1-p)}$$

Så hvis vi vil skrive summen af alle disse parenteser, kan vi skrive det som en kvotientrække, som følger:

$$s_{2^m-1} \leq 1 + \sum_{k=1}^{m-1} 1 \cdot 2^{k(1-p)} = 1 + \sum_{k=1}^{m-1} 1 \cdot (2^{(1-p)})^k = \sum_{k=0}^{m-1} 1 \cdot (2^{(1-p)})^k$$

Dette er smart, da hvis $k = 0$ fås $1 \cdot (2^{(1-p)})^0 = 1$, og på denne måde får vi 1 med ind i kvotientrækken.

Grunden til, at der står $1\cdot$ inde i summen, er for at vi kan bruge **sætning 4.32**, hvorfra vi ved at rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n$$

er konvergent hvis $|r| < 1$ og $a \neq 0$. I dette tilfælde er $a = 1$, $r = 2^{1-p}$ og $n = k$. Da vi har sat $p > 1$ får vi dermed at $|2^{1-p}| < 1$. Derfor ved vi, at

$$\sum_{k=0}^{m-1} 1 \cdot (2^{(1-p)})^k$$

er konvergent. Ud fra **sætning 4.36** ved vi at hvis rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

er konvergent, og hvis det gælder:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad , \quad c \ > 0$$

Så er

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

konvergent.

Ud fra det har vi at $s_{2^m-1} = b_n$ er konvergent, fordi vi netop har vist at

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot (2^{(1-p)})^k.$$

er konvergent.

Vi mangler nu blot at vise, at dette medfører, at afsnitsfølgen $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent. Vi har vist, at delfølgen $\{s_{2^m-1}\}_{m=1}^{\infty}$ er konvergent, men da alle leddene i rækken, som $\{s_n\}$ er afsnitsfølge for, er positive, så er $\{s_n\}$ voksende, og det er nok at vise, at $\{s_n\}$ er begrænset. Men det gælder, at $s_n \leq s_{2^m-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, så da $\{s_{2^m-1}\}$ er konvergent er den begrænset, og dermed er $\{s_n\}$ begrænset og dermed konvergent.

$\blacksquare$