Opgave 147

Lige så vel som det i definitionen af konvergens af en talfølge er nok at se på store N, er det i definitionen af kontinuitet nok at se på "små" δ, hvormed vi vil forstå at $\delta \leq \delta_0$, hvor δ_0 er et eller andet givet positivt tal. Lad altså $\delta_0 > 0$ være givet. Bevis, at betingelsen

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 \in]0, \delta_0] \forall x \in A : |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \forall x \in A : |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{2}$$

Bevis
Det bevises først at (1) medfører (2) og dermed antager vi at (1) gælder:

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Hvis δ_1 afparerer ε, så kan vi sætte $\delta_2 = \delta_1$, og dermed vil δ_2 også afparere ε. Altså:

$$|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Nu bevises at (2) medfører (1) og dermed antager vi at (2) gælder:

Lad $\varepsilon > 0$ og $\delta_0 > 0$ være givet. Vælg δ_2, så δ_2 afparerer ε i (2).
Hvis $\delta_0 > \delta_2$, så vil $\delta_2 \in (0, \delta_0]$, og dermed kan vi sætte $\delta_1 = \delta_2$.
Hvis $\delta_0 \leq \delta_2$, så sættes$\delta_1 = \delta_0$. Hvis $\delta_0 \leq \delta_2$, så er $\delta_1 \leq \delta_2$, så hvis δ_2 afparerer ε, så afparerer δ_1 også ε. Så:

$$|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$\blacksquare$