Gruppe 4 $|N|$

148. $< \epsilon$ kan erstattes af $\leq \epsilon$ og $< \delta$ af $\leq \delta$

Vis, at hver af de følgende tre betingelser er ensbetydende med, at f er kontinuert i a:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in A : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \epsilon \tag{1}$$

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in A : |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \epsilon \tag{2}$$

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in A : |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon \tag{3}$$

Definition 1. *: Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$, lad $f : A \implies \mathbb{R}$ være en reel funktion defineret på A, og lad a være et punkt i A. f siges at være kontinuert i punktet a, hvis*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in A : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon. \tag{4}$$

Hvis denne betingelse ikke er opfyldt, siges f at være diskontinuert i a.

Bevis. Det skal vises, at (4) medfører (1). Herefter vises det, at (1) medfører (2), (2) medfører (3), og til sidst at (3) medfører (4). Når dette er bevist, kan det siges, at der er biimplikation mellem alle ligningerne.

- Argumentet for (4) $\implies$ (1) er trivielt, da $x < y \implies x \leq y$ er sand.
- Argumentet for (1) $\implies$ (2) er, at man kan lade et $\epsilon > 0$ være givet. For $\tilde{\epsilon} = \epsilon$ eksisterer der ifølge (1) et $\tilde{\delta} > 0$ hvor der gælder $|x - a| < \tilde{\delta} \implies |f(x) - f(a)| \leq \tilde{\epsilon} = \epsilon$. Der vælges nu et $\delta = \frac{\tilde{\delta}}{2}$. Så gælder følgende $|x-a| \leq \delta = \frac{\tilde{\delta}}{2} \implies |x-a| < \tilde{\delta} \implies |f(x)-f(a)| \leq \epsilon$. $\tilde{\delta}$ kan nu dermed erstatte det δ som (2) siger der gælder for et givet ϵ
- Argumentet for (2) $\implies$ (3) er, at da man kan vælge et $\epsilon > 0$ for (2), kan man vælge $\tilde{\epsilon}$ til at være $\tilde{\epsilon} = \dfrac{\epsilon}{2}$. Det ses at $\tilde{\epsilon} < \epsilon$ og dermed $|f(x) - f(a)| \leq \tilde{\epsilon} < \epsilon$
- Argumentet for (3) $\implies$ (4) er trivielt at hvis for alle x hvor $|x-a| \leq \delta$ er det samtidigt gældende for alle x ved $|x - a| < \delta$

Givet at

$$(4) \implies (1) \implies (2) \implies (3) \implies (4) \tag{5}$$

er ovenstående biimplikationer til hinanden, ergo

$$(4) \iff (1) \iff (2) \iff (3) \tag{6}$$

■