Opgave 164

e16g3113

November 28, 2016

Opgave 164

a) Lad $f : D_f \to \mathbb{R}$ være injektiv, og lad $g : V_f \to \mathbb{R}$ være f's omvendte funktion f^{-1}. Bevis, at $g(f(x)) = x$ for alle $x \in D_f$.

Lad $x \in D_f$ og $f(x) = y$, så er g den omvendte funktion af f og det gælder jf. **Def. 5.20**, at

$$f(x) = y \Rightarrow g(f(x)) = x \tag{1}$$

b) Bevis, at $f(g(y)) = y$ for alle $y \in D_g = V_f$.

Lad $y \in D_g = V_f$ og $x = g(y)$, hvor x løser $f(x) = y$. $g(y) = x$ indsættes nu i $f(x) = y$ så der fås $f(g(y)) = y \ \forall y \in D_g = V_f$.

c) Bevis, at g er injektiv, og at $g^{-1} = f$.

Lad $y_1, y_2 \in D_g$ hvor $y_1 \neq y_2$. Så findes der $x_1, x_2 \in D_f$ så $y_i = f(x_i)$ hvor $i = 1, 2$. Da gælder $f(x_1) = y_1 \neq f(x_2) = y_2$ så $x_1 \neq x_2$. Da $g(y_1) = x_1 \neq g(y_2) = x_2$ så er g injektiv.
Da g er injektiv har den, ifølge **Def. 5.20**, en entydig invers funktion $g^{-1}(x) = y$ hvor $x \in V_g = \{g(y) | y \in D_g\}, V_g = D_f$ da g er f's omvendte funktion. Det ses nu at $g(f(x)) = x \Rightarrow f(x) = g^{-1}(x)$.