Analyse

Gruppe 1 (G4-103)

September 2016

0.1 Opgave 17

Sætning 1.15 bevist ved induktion. Giv et induktionsbevis for formlen:

$$r^n - s^n = (r-s)\sum_{j=0}^{n-1} r^j s^{n-j-1}$$

Proof. Formlen kaldes for $P(n)$. Først vises, at $P(1)$ er sand:

$$\begin{aligned}
(r-s)\sum_{j=0}^{1-1} r^j s^{1-j-1} &= (r-s)(r^0 s^0) \\
&= (r-s)\cdot 1 \\
&= r-s
\end{aligned}$$

Dermed er det sandt for $n = 1$. Herefter antages det, at $P(k)$ er sand

$$r^k - s^k = (r-s)\sum_{j=0}^{k-1} r^j s^{k-j-1}$$

Herefter vises det for $P(k+1)$:

$$\begin{aligned}
(r-s)\sum_{j=0}^{(k+1)-1} r^j s^{(k+1)-j-1} &= (r-s)\sum_{j=0}^{k} r^j s^{k-j} \\
&= (r-s)\sum_{j=0}^{k-1} r^j s^{k-j} + (r-s)(r^k s^{(k-k)}) \\
&= (r-s)\sum_{j=0}^{k-1} r^j s^{k-j} + (r-s)r^k
\end{aligned}$$

s trækkes ud af summen:

$$\begin{aligned}
&= s((r-s)\sum_{j=0}^{k-1} r^j s^{k-j-1}) + (r-s)r^k \\
&= s(r^k - s^k) + (r-s)r^k \qquad (1) \\
&= sr^k - s^{k+1} + r^{k+1} - sr^k \\
&= r^{k+1} - s^{k+1}
\end{aligned}$$

Bruger i ligning (1) at $P(k)$ er sand. Det er hermed vist at $P(k+1)$ er sand for $k \geq 1$ og $P(n)$ er dermed sand for $n \in \mathbb{N}$. $\square$