Kapitel 1

Opgave 18 - bevis sætning 1.12

OPGAVEBESKRIVELSE:

Bevis at enhver ikke tom delmængde A af $\mathbb{N}$ har et mindste element.

Hint: Antag at $A \subseteq \mathbb{N}$ ikke har noget mindste element, og vis derudfra ved induktion, at udsagnet U_n er sandt for alle n, hvor U_n er udsagnet

$$U_n : m \in A : m > n$$

Slut heraf, at $A \cap \mathbb{N} = \emptyset$

Sætning 1: Sætning 1.12

Enhver ikke tom delmængde A af $\mathbb{N}$ har et mindste element.

Dette ønsker vi at bevise ved hjælp af et induktionsbevis, hvori vi benytter os af et modstridsbevis.

Bevis
Antag, at $A \subseteq \mathbb{N}$ ikke har et mindste element. Vi vil nu vise, at så gælder $U_n\colon \forall m \in A\colon m > n$.

<u>Basis skridt</u>
U_1: $\forall m \in A : m > 1$.

Vi antager for modstrid at dette ikke er sandt, hvilket betyder:

$$\exists m \in A : m \leq 1$$

Dette er i **modstrid** med, at A ikke har et mindste element, da 1 er det mindste element i $\mathbb{N}$ og $A \subseteq \mathbb{N}$, vil A dermed have 1 som mindste element. Dette betyder altså at U_1 er sand.

Induktionsskridt
Vi antager, at U_n er sand. Det vil sige:

$$U_n\colon \forall m \in A : m > n$$

Vi vil nu vise at U_{n+1} er sand. Dette gøres igen ved hjælp af modstrid. Vores udsagn er:

$$U_{n+1}\colon \forall m \in A : m > n+1$$

Vi antager for modstrid, at dette udsagn ikke er sandt, hvilket giver følgende udsagn:

$$\exists m \in A : m \leq n+1$$

Pr. induktionsantagelse ved vi, der gælder $m > n$, og ifølge U_{n+1} at $m \leq n+1$. Dette betyder:

$$\exists m \in A : n < m \leq n+1$$

Da vi ved at $A \subseteq \mathbb{N}$, må det betyde at $m = n+1$, da n og $n+1$ begge er heltal, og m også skal være det. Dette betyder, jf. U_n, at m er mindste element i A, hvilket er i **modstrid** med vores antagelse om, at A ikke har et mindste element. Dette betyder, at udsagnet

$$U_{n+1}\colon \forall m \in A : m > n+1.$$

er sandt. Da vi via induktionsbeviset har vist, at udsagnet U_{n+1} er sandt, betyder det at udsagnet er sandt for alle positive heltal n.

Vi antager herefter at $A \neq \emptyset$. Dette betyder at $\exists a \in \mathbb{N} : a \in A$. Dette er en **modstrid**, da det vil betyde at $a > a$, jf. U_a, hvilket ikke er sandt.

Derfor er den eneste mulighed at $A = \emptyset$, hvilket er i **modstrid** med vores antagelse om at A er en ikke-tom mængde. Dette betyder derfor, at enhver ikke-tom delmængde af $\mathbb{N}$ har et mindste element.

$\blacksquare$