Opgave 184

Gruppe 6 og 8 (G4-113 og G3-111)

November 4, 2016

Opgave 184

Bevis for Sætning 6.5 (a).

Vis, at hvis $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ er en konvergent punktfølge, så er talfølgen $\{\|x^k\|\}_{k=1}^{\infty}$ konvergent, og

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k\| = \|\lim_{k\to\infty} x^k\| \tag{1}$$

Bevis

Det vises først, at talfølgen $\|x^k\|_{k=1}^{\infty}$ er konvergent.
Talfølgen $\{\|x^k\|\}_{k=1}^{\infty}$ kan beskrives som $\{f(x^k)\}_{k=1}^{\infty}$ ved brug af funktionen $f : x \mapsto \|x\|$, som er kontinuert (se sætning 6.20). Følgende skal gælde for, at en funktion er følgekontinuert i et punkt a:

$$\lim_{k\to\infty} x^k = a \implies \lim_{k\to\infty} f(x^k) = f(a) \tag{2}$$

Det følger, at $\{\|x^k\|\}_{k=1}^{\infty}$ er konvergent.

Det vises dernæst, at $\lim_{k\to\infty} \|x^k\| = \|\lim_{k\to\infty} x^k\|$.

Ifølge sætning 6.4 (c) gælder der for punktfølgen $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ og x et punkt i $\mathbb{R}^n$, at:

$$x^k \to x \quad \text{for} \quad k \to \infty \iff x^k - x \to 0 \quad \text{for} \quad k \to \infty \tag{3}$$

Ifølge sætning 6.2 gælder der, at $\lim_{k\to\infty} \|x - x^k\| = 0$, og ved hjælp af trekantsuligheden (se ligning (6.20) på side 108 i bogen) gælder der så:

$$|\|x\| - \|x^k\|| \leq \|x - x^k\| \tag{4}$$

Det fremgår, at højresiden må gå mod nul ifølge definition 6.2, og som følge af klemmelemmaet må venstresiden også gå mod nul.

Derfor gælder der også, at $\|x^k\| \to \|x\|$ ifølge definition 6.2. Derfor gælder der, at:

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k\| = \|\lim_{k\to\infty} x^k\| \tag{5}$$

$\blacksquare$