Analyse Opg 185

gruppe 11

October 2016

Opgave 185

1 Selve opgaven

Bevis for Sætning 6,5 (b)
Vis, at hvis punktfølgerne ${x^k}_{k=1}^{\infty}$ og ${y^k}_{k=1}^{\infty}$ er konvergente, så er punktfølgerne ${x^k \pm y^k}_{k=1}^{\infty}$ konvergente, og

$$\lim_{k\to\infty}(x^k \pm y^k) = \lim_{k\to\infty} x^k \pm \lim_{k\to\infty} y^k \tag{1}$$

2 Løsningen

Beviset er et direkte bevis.
Først antages det, at punktfølgerne ${x^k}_{k=1}^{\infty}$ og ${y^k}_{k=1}^{\infty}$ er konvergente, hvorved **Definition** $6,2$ **(Konvergens af punktfølge)** gælder:
En punktfølge ${x^k}_{k=1}^{\infty}$ *i* $\mathbb{R}^n$ *siges at være* ***konvergent****, hvis der eksisterer et punkt* $x \in \mathbb{R}^n$ *således, at*

$$\lim_{k\to\infty} \| x - x^k \| = 0 \tag{2}$$

I så fald kaldes x *for følgens* ***grænsepunkt****, vi siger, at punktfølgen* ***konvergerer mod*** x*, og vi skriver*

$$x^k \to x \text{ for } k \to \infty \text{ eller } \lim_{k\to\infty} x^k = x$$

Dette gælder også for punktfølgen $(y^k)_{k=1}^{\infty}$, altså:

$$\lim_{k\to\infty} \| y - y^k \| = 0$$

og

$$y^k \to y \text{ for } k \to \infty$$

Sæt nu $x^k \pm y^k = z^k$ og $x \pm y = z$, hvorved det skal bevises, at $z^k \to z$ for $k \to \infty$ der i følge definition 6,2 svarer til at $\| z^k - z \| \to 0$ for $k \to \infty$.
Vi indsætter nu z's udtryk heri og vi skal altså vise at:

$$\| (x^k \pm y^k) - (x \pm y) \| \to 0 \text{ for } k \to \infty$$

hvilket kan omskrives til

$$|| x^k \pm y^k - x \mp y || \to 0 \text{ for } k \to \infty$$

hvilket igen kan omskrives til

$$|| (x^k - x) \pm (y^k - y) || \to 0 \text{ for } k \to \infty$$

Vi skal bevise at

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, N \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} : k \geq N \Longrightarrow || (x^k - x) \pm (y^k - y) || < \varepsilon$$

Så lad $\varepsilon > 0$ være givet først ser vi på

$$|| (x^k - x) \pm (y^k - y) ||$$

og observer ved hjælp af trekantulighen at

$$|| (x^k - x) \pm (y^k - y) || \leq || (x^k - x) || + || (y^k - y) ||$$

Vi ved at $x^k - x \to 0$ for $k \to \infty$ derfor eksisterer der et $N' \in \mathbb{N}$ således at $k \geq N' \Rightarrow || x^k - x || < \frac{\varepsilon}{2}$ og vi ved at $y^k - y \to 0$ for $k \to \infty$ derfor eksisterer der et $N'' \in \mathbb{N}$ således , at $k \geq N'' \Rightarrow || (y^k - y) || < \frac{\varepsilon}{2}$
Vælg nu $N = max\{N', N''\}$. Så har vi for $k \geq N$:

$$|| (x^k - x) \pm (y^k - y) || \leq || (x^k - x) || + || (y^k - y) || < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Nu ved vi at

$$|| (x^k - x) \pm (y^k - y) || < \varepsilon$$

for $k \geq N$ og det var det vi manglede for at vise at $x^k \pm y^k \to x \pm y$ for $k \to \infty$

eller formuleret på en anden måde:

$$\lim_{k \to \infty} (x^k \pm y^k) = \lim_{k \to \infty} x^k \pm \lim_{k \to \infty} y^k$$