Opgave 186

Vis, at hvis $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ er en konvergent talfølge og $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ er en konvergent punktfølge, så er punktfølgen $\{a_k x^k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergent, og:

$$\lim_{k\to\infty} a_k x^k = \lim_{k\to\infty} a_k \lim_{k\to\infty} x^k$$

Bevis:

Vi antager uden tab af generalitet, at punktfølgen tilhører $\mathbb{R}^n$. Vi ved fra Lemma 6.6, at hvis en punktfølge er konvergent, så vil alle tilhørende koordinatfølger også være konvergente. Da en koordinatfølge blot er en talfølge, har vi altså et produkt af to talfølger til hvert koordinat. Disse vil have følgende grænseværdi jf. sætning 4.6 (d):

$$\lim_{k\to\infty} a_k x_j^k = \lim_{k\to\infty} a_k \lim_{k\to\infty} x_j^k \ , \ \forall j \leq n : j, n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Vi ved altså hermed, at alle koordinatfølger for $\{a_k x^k\}_{k=1}^{\infty}$ har en grænseværdi. Fra lemma 6.6 vides det derfor, at hvis alle koordinatfølger har en grænseværdi, vil punktfølgen også have en grænseværdi. $\{a_k x^k\}_{k=1}^{\infty}$ er dermed konvergent. Grænseværdien udregnes nu ud fra den vektor, der opstår af ligning 1:

$$\begin{bmatrix} \lim_{k\to\infty} a_k \lim_{k\to\infty} x_1^k \\ \lim_{k\to\infty} a_k \lim_{k\to\infty} x_2^k \\ \vdots \\ \lim_{k\to\infty} a_k \lim_{k\to\infty} x_n^k \end{bmatrix}$$

Da $\lim_{k\to\infty} a_k$ er en skalar, kan denne trækkes udenfor vektoren, da den er ganget på alle led:

$$\lim_{k\to\infty} a_k \begin{bmatrix} \lim_{k\to\infty} x_1^k \\ \lim_{k\to\infty} x_2^k \\ \vdots \\ \lim_{k\to\infty} x_n^k \end{bmatrix}$$

Vektoreren, der er tilbage svarer til grænseværdien for punktfølgen jf. lemma 6.6. Grænseværdien bliver derfor:

$$\lim_{k\to\infty} a_k \lim_{k\to\infty} x^k$$

$\blacksquare$

Opgave 187

Lad $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ og $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ være punktfølger i $\mathbb{R}^n$. Vis, at hvis $\lim_{k\to\infty} x^k = 0$ og $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ er begrænset så gælder

$$\lim_{k\to\infty} \langle x^k, y^k \rangle = 0. \tag{2}$$

Bevis:

Det vides fra Cauchy-Schwarz, at

$$|\langle x^k, y^k \rangle| \leq ||x^k||\ ||y^k|| \tag{3}$$

Da $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ er begrænset gælder jf. def. 6.3 at

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \text{ så } ||y^k|| \leq M\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Dermed kan vi ud fra (3) skrive:

$$|\langle x^k, y^k \rangle| \leq ||x^k||M$$

Vi ved dermed at:

$$-||x^k||M \leq \langle x^k, y^k \rangle \leq ||x^k||M \tag{4}$$

Det vides fra sætning 4.6 (b), at $\lim_{k\to\infty} ||x^k||M = M \lim_{k\to\infty} ||x^k||$. Derudover vides det fra Lemma 6.6, at $\lim_{k\to\infty} x^k = 0 \iff \lim_{k\to\infty} x_j^k = 0$ for alle $j = 1, 2, ..., n$. Det vil sige, at $\lim_{k\to\infty} x^k = 0 \implies \lim_{k\to\infty} ||x^k|| = 0$. Da M blot er et tal og $\lim_{k\to\infty} ||x^k|| = 0$, bliver $M \lim_{k\to\infty} ||x^k|| = 0$. Dvs at vi jf. (4) og klemmelemmaet kan skrive

$$\lim_{k\to\infty} \langle x^k, y^k \rangle = 0$$

$\blacksquare$