Analyse opgave 2.1

Gruppe 5 - G4-111

November 2016

Sætning 2.4
Lad (X, d) være et metrisk rum. Så er $(X, \mathcal{T}_d)$ et topologisk rum, og alle åbne kugler er åbne, mens lukkede kugler er lukkede mængder i den inducerede topologi.

Bevis Først skal det vises at $(X, \mathcal{T}_d)$ er et topologisk rum. Dette gøres ved at vise at alle tre punkter i definition 1.1 er opfyldt.

$\mathcal{T}_d = \{U \in P(x) | U \ er \ åben \ mht. \ metrik\}$.

(i) Hvis $U_i \in \mathcal{T}_d$, så er $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_d$.
Lad $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ være givet, så $\exists i_0 \in I$ så $U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, hvor $x \in U_{i_0}$. Da U_{i_0} er en åben mængde, må x være et indre punkt i U_{i_0}, derfor $\exists r > 0 : B_r(x) \subseteq U_{i_0}$ $\subset \bigcup_{i \in I} U_i$ Dermed er det også et indrepunkt i $\bigcup_{i \in I} U_i$

(ii) Hvis $U_i, U_j \in \mathcal{T}_d$, så er $U_i \cap U_j \in \mathcal{T}_d$.
Lad $x \in U_i \cap U_j$ være givet, da x er et indre punkt i U_i og U_j, r vælges til $r = \min\{r_i, r_j\}$, hvor r_i og r_j er defineret på passende vis, dermed $\exists r > 0 :$ $B_r(x) \subseteq U_i \cap U_j$.
Altså er x et indre punkt i $U_j \cap U_j$ og da $x \in U_i \cap U_j$ var vilkårligt valgt, er $U_i \cap U_j$ åben.

(iii) Vi har både $X \in \mathcal{T}$ og $\varnothing \in \mathcal{T}$.
Det skal vises, at X og $\varnothing$ udelukkende består af indre punkter. Lad derfor $a \in U = X$. Så er $B_r(a) \subset X \ \forall \ r$, hvilket vil sige, at a er et indre punkt. $\varnothing$ består naturligvis udelukkende af indre punkter, da det er den tomme mængde.

Så skal det vises at en åben kugle er en åben mængde. Lad $x \in B_r(a)$ og $x_0 \in B_\varepsilon(x)$ hvor $\varepsilon = \frac{r - d(x,a)}{2}$ Så gælder der ifølge trekantsuligheden at

$$d(x_0, a) \leq d(x, a) + d(x, x_0) < d(x, a) + \varepsilon = \frac{r + d(x, a)}{2} < r$$

Dermed er alle punkter i $B_r(a)$ indre punkter og der gælder at $B_\varepsilon(x) \subseteq B_r(a)$ og $B_r(a)$ en åben mængde.

Det vises nu at en lukket kugle er en lukket mængde.
Det skal altså vises at $\overline{B_r(a)}^C$ er en åben mængde.
Lad $x \in \overline{B_r(a)}^C$ og lad $b \in B_\delta(x)$ hvor $\delta = \frac{d(x,a)-r}{2}$. Bemærk at $d(x,a) > r \Rightarrow \delta > 0$. Så gælder det at

$$d(a,b) \geq d(x,a) - d(x,b) > d(x,a) - \delta = \frac{d(x,a)+r}{2} > r$$

Derfor følger det at $B_\delta(x) \subset \overline{B_r(a)}^C$ og $\overline{B_r(a)}^C$ er åben.

■