Opgave 2.5

Sætning 2.6 (Følgekaraktarisation af kontinuitet).
Lad (X, d_X) og (Y, d_Y) være metriske rum. Så er $f : X \to Y$ kontinuert (fra (X, d_X) til (Y, d_Y)) hvis og kun hvis f er følgekontinuert.

Bevis (i) Antag først, at f er kontinuert i a. Vi skal bevise, at så er f følgekontinuert i a. Dertil betragter vi en talfølge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ i A således, at $x_n \to a$ for $n \to \infty$. Vi skal vise, at $f(x_n) \to f(a)$ for $n \to \infty$, dvs. vi skal vise, at

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : d(f(a), f(x_n)) < \varepsilon. \tag{1}$$

For at vise dette bruger vi dels antagelsen om, at f er kontinuert i a, dvs.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall x \in A : d(a, x) < \delta \ \Rightarrow \ d(f(a), f(x)) < \varepsilon \tag{2}$$

og dels antagelsen om, $x_n \to a$, dvs.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R} \forall n \geq N : d(a, x_n) < \varepsilon \tag{3}$$

Lad nu $\varepsilon > 0$ være givet. Til dette ε bestemmer vi et δ i henhold til ligning (2). Derefter bruger vi ligning (3) med ε erstattet af δ til at bestemme et $N \in \mathbb{N}$. Vi påstår, at det således fundne N kan afparere det givne ε i ligning (1).
Lad nemlig $n \geq N$. Så er $d(a, x_n) < \delta$ ifølge (3), og derfor er $d(f(a), f(x_n)) < \varepsilon$ ifølge (2). Hermed er det bevist, at hvis f er kontinuert i a, så er f følgekontinuert i a.

(ii) Vi skal omvendt bevise, at hvis f er følgekontinuert i a så er f kontinuert i a. Det viser vi ved kontraponering, dvs. vi viser, at hvis f ikke er kontinuert i a, så er f heller ikke følgekontinuert i a.
Lad os først formulere kontinuiteten i a lidt anderledes:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A \cap \,]a - \delta, a + \delta[\, : \ d(f(a), f(x)) < \varepsilon$$

At f ikke er kontinuert i a er negationen heraf, altså

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in A \cap \,]a - \delta, a + \delta[\, : d(f(a), f(x)) \geq \varepsilon \tag{4}$$

Lad ε være det ε, som eksisterer ifølge (4), og vælg, for hvert $n = 1, 2, ..., \delta = \frac{1}{n}$. For dette δ eksisterer der et x, som vi betegner x_n, i $A \cap]a - \frac{1}{n}, a + 1n[$ således at $d(f(a), f(x_n)) \geq \varepsilon$.
Vi har hermed konstrueret en talfølge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ således, at (a) $x_n \in A$ for alle n, og
(b) $x_n \to a$ for $n \to \infty$, men
(c) $f(x_n)$ konvergerer ikke mod $f(a)$ for $n \to \infty$.

Hermed er det bevist, at f ikke er følgekontinuerti a.

$\blacksquare$