Kapitel 1

Opgave 2.6

Bevis Sætning 2.17

Sætning 1: Sætning 2.17

Lad (V, N) være et normeret vektorrum. Så er (V, d_N) et metrisk rum.

Lad (V, N) være et normeret vektorrum. Det skal bevises, at (V, d_N) er et metrisk rum. Derfor skal det opfylde følgende:

(i) Troskab: $d_N(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) Symmetri: $d_N(x, y) = d_N(y, x)$

(iii) Trekantsuligheden: $d_N(x, y) \leq d_N(x, z) + d_N(z, y)$

Bevis
(i) Troskab:

Da $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \ \forall x \in V$, gælder det, at:

$$N(x - y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$$

Da $d_N(x, y) = N(x - y) \ \ \forall x, y \in V$, medfører det, at:

$$d_N(x, y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(ii) Symmetri:

Da $N(ax) = |a|N(x) \ \ \forall x \in V, \forall a \in \mathbb{K}$, gælder det, at:

$$\begin{aligned} d_N(x, y) &= N(x - y) \\ &= N((-1)(y - x)) \\ &= |-1|N(y - x) \\ &= N(y - x) \\ &= d_N(y, x) \end{aligned}$$

(iii) Trekantsuligheden:

Da $N(x+y) \leq N(x) + N(y) \ \ \forall x, y \in V$, gælder det, at:

$$d_N(x,y) = N(x-y) = N(x-z+z-y) \leq N(x-z) + N(z-y) = d_N(x,z) + d_N(z,y)$$

$\blacksquare$