Kapitel 1

Opgave 229

OPGAVEBESKRIVELSE:

Entydighed af grænseværdi (Bevis for Sætning 6.33)

Bevis, at en funktion højst kan have én grænseværdi for $x \to b$.

Sætning 1: Sætning 6.33 (Entydighed af grænseværdi)

En funktion kan højst have én grænseværdi for $x \to b$.

Bevis
Antag for modstrid, at der findes to grænseværdier c' og $c'' \neq c'$.

Da det skal gælde for alle $\varepsilon > 0$, vælges

$$\varepsilon = \frac{|c'' - c'|}{2}$$

Da vælges δ_1 og δ_2, så:

$$\exists \delta_1 > 0 : 0 < ||x - b|| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - c'| < \varepsilon$$
$$\exists \delta_2 > 0 : 0 < ||x - b|| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - c''| < \varepsilon$$

Så vælges $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. For $0 < ||x - b|| < \delta$ gælder det vha. trekantsuligheden

$$|c'' - c'| = |c'' - f(x) + f(x) - c'| \leq |c'' - f(x)| + |f(x) - c'| < 2\varepsilon = |c'' - c'|$$

Altså $|c'' - c'| < |c'' - c'|$, hvilket er en modstrid.

Dermed er det bevist, at en funktion højst kan have én grænseværdi for $x \to b$.

■