Opgave 230

(A) Hvis funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ har en grænseværdi for $x \to b$, er den begrænset i nærheden af b.

Bevis. Vi ved at f er defineret i nærheden af b, da f har grænseværdi for $x \to b$. Dvs. at:

$$\dot{B}_r(b) = \{x \in \mathbb{R}^n | 0 < ||x - b|| < r\} \subset A \tag{1}$$

Sæt $\varepsilon = 1$. Da f har en grænseværdi ved vi

$$\exists \delta > 0 : \quad 0 < ||x - b|| < \delta \implies |f(x) - c| < 1 \tag{2}$$

Sæt nu $r = \delta$, så r afparerer det givne $\varepsilon = 1$. Da må gælde at $\forall x \in \dot{B}_r(b) : |f(x) - c| < 1 \implies |f(x)| < 1 + |c|$. Dermed er $f(\dot{B}_r(b))$ begrænset. Med andre ord, er f begrænset i nærheden af b.

■

(B) Hvis funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ har en grænseværdi $c > 0$ for $x \to b$, eksisterer der et reelt tal $k > 0$ således, at $f(x) \geq k$ i nærheden af b.

Bevis. Lad $k \in (0\,, c)$ og sæt $\varepsilon = c - k$. Da f har grænseværdien c for $x \to b$ gælder:

$$\exists \delta > 0 : \quad 0 < ||x - b|| < \delta \implies |f(x) - c| < \varepsilon$$

heraf gælder $\forall x \in \dot{B}_\delta(b)$:

$$k - c < f(x) - c < c - k$$

Hvilket medfører, at $f(x) > k$. Og dermed selvfølgelig også at $f(x) \geq k$

■