Opgave 231

Bevis for Sætning 6.35

Lad $f, g : A \to \mathbb{R}$, være to funktioner, der begge har grænseværdier for $x \to b$. så gælder:

a) funktionen $|f|$ har en grænseværdi for $x \to b$, og:

$$\lim_{x\to b} |f(x)| = |\lim_{x\to b} f(x)|$$

b) funktionen rf har en grænseværdi for $x \to b$, og:

$$\lim_{x\to b} rf(x) = r \lim_{x\to b} f(x)$$

c) funktionen $g + f$ har en grænseværdi for $x \to b$, og:

$$\lim_{x\to b} (f+g)(x) = \lim_{x\to b} f(x) + \lim_{x\to b} g(x)$$

d) funktionen $g \cdot f$ har en grænseværdi for $x \to b$, og:

$$\lim_{x\to b} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to b} f(x) \cdot \lim_{x\to b} g(x)$$

e) Hvis $\lim_{x\to b} g(x) \neq 0$ har funktionen $\frac{1}{g}$ en grænseværdi for $x \to b$, og:

$$\lim_{x\to b} \frac{1}{g}(x) = \frac{1}{\lim_{x\to b} g(x)}$$

f) Hvis $\lim_{x\to b} g(x) \neq 0$ har funktionen $\frac{f}{g}$ en grænseværdi for $x \to b$, og:

$$\lim_{x\to b} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to b} f(x)}{\lim_{x\to b} g(x)}$$

Bevis. **a)**
$|f|$ har en grænseværdi hvis følgende er opfyldt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < ||x - b|| < \delta \implies ||f(x)| - |c|| < \varepsilon$$

Det følger af trekantsuligheden at:

$$||f(x)| - |c|| \leq |f(x) - c| < \varepsilon$$

Det ses da at $|f|$ har en grænseværdi, samt at:

$$\lim_{x\to b} |f(x)| = |\lim_{x\to b} f(x)|$$

□

Bevis. **b)**
rf har en grænseværdi hvis følgende er opfyldt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < ||x - b|| < \delta \implies |rf(x) - rc| < \varepsilon$$

Det antages $r \neq 0$ idet hvis $r = 0$ haves $|rf(x) - rc| = 0$, og resultatet er da trivielt.
Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Der haves da:

$$\exists \delta_1 > 0 : 0 < ||x - b|| < \delta_1 \implies |f(x) - c| < \frac{\varepsilon}{|r|}, \text{hvor}$$

Der ses da:

$$|f(x) - c| < \frac{\varepsilon}{r} \implies r|f(x) - c| < \varepsilon \implies |rf(x) - rc| < \varepsilon$$

Der vælges så $\delta = \delta_1$ hvormed det ses at rf har en grænseværdi samt at:

$$\lim_{x \to b} rf(x) = r \lim_{x \to b} f(x)$$

□

Bevis. **c)**
$f + g$ har en grænseværdi hvis følgende er opfyldt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < ||x - b|| < \delta \implies |f(x) - c_1 + g(x) - c_2| < \varepsilon$$

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Der haves da:

$$\exists \delta_1 > 0 : 0 < ||x - b|| < \delta_1 \implies |f(x) - c_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists \delta_2 > 0 : 0 < ||x - b|| < \delta_2 \implies |g(x) - c_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ved hjælp af trekantsuligheden fås:

$$|f(x) - c_1 + g(x) - c_2| \leq |f(x) - c_1| + |g(x) - c_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Det ses da, at med $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, har $f + g$ en grænseværdi, samt at

$$\lim_{x \to b} (f + g)(x) = \lim_{x \to b} f(x) + \lim_{x \to b} g(x)$$

□

Bevis. **d)**
fg har en grænseværdi hvis følgende er opfyldt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < ||x - b|| < \delta \implies |f(x)g(x) - c_1c_2| < \varepsilon$$

Udtrykket $|f(x)g(x) - c_1c_2|$ kan omskrives på følgende måde:

$$|f(x)g(x) - c_1c_2| = |(f(x) - c_1)g(x)| + |c_1(g(x) - c_2)|$$

Det følger af lemma 6.34 at der findes en udprikket kugle $\dot{B}_r(b)$, hvorom det gælder at $g(x)$ er begrænset. Det betyder $\exists M \in \mathbb{R} : M > g(x) \forall x \in A \cap \dot{B}_r(b)$. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Det haves da:

$$\exists \delta_1 > 0 : 0 < ||x - b|| < \delta_1 \implies |f(x) - c_1| < \frac{\varepsilon}{2M}$$
$$\exists \delta_2 > 0 : 0 < ||x - b|| < \delta_2 \implies |g(x) - c_2| < \frac{\varepsilon}{2c_1}$$

Dette medfører:

$$|f(x)g(x) - c_1c_2| = |(f(x) - c_1)g(x)| + |c_1(g(x) - c_2)| < |(f(x) - c_1)M| + |c_1(g(x) - c_2)| < \frac{\varepsilon c_1}{2c_1} + \frac{\varepsilon M}{2M} = \varepsilon$$

Det ses da, at med $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, har fg en grænseværdi, samt at

$$\lim_{x \to b} (fg)(x) = \lim_{x \to b} f(x) \cdot \lim_{x \to b} g(x)$$

$\square$

Bevis. **e**)
$\frac{1}{g}$ har en grænseværdi hvis $c = \lim_{x \to b} g(x) \neq 0$, og følgende er opfyldt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < ||x - b|| < \delta \implies \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{c} \right| < \varepsilon$$

Udtrykket $\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{c} \right|$ kan omskrives på følgende måde:

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{c} \right| = \left| \frac{c - g(x)}{cg(x)} \right|$$

Der haves at:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : 0 < ||x - b|| < \delta_2 \implies |g(x) - c| < \varepsilon$$

Sæt da $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$. Der gælder så at $\delta_1 > 0 : 0 < ||x - b|| < \delta_1 \implies |g(x) - c| < \frac{|c|}{2}$
Ved hjælp af trekantsuligheden fås da:

$$|c| - |g(x)| \leq ||c| - |g(x)|| \leq |g(x) - c| < \frac{|c|}{2} \implies \frac{|c|}{2} < |g(x)|$$

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Det haves da at:

$$\delta_2 > 0 : 0 < ||x - b|| < \delta_2 \implies |g(x) - c| < \varepsilon |c| \frac{|c|}{2}$$

Dette medfører at:

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{c}\right|=\left|\frac{c-g(x)}{cg(x)}\right|<\frac{\varepsilon|c|\frac{|c|}{2}}{|c|\frac{|c|}{2}}=\varepsilon$$

Det ses da at med $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, har $\frac{1}{g(x)}$ en grænseværdi, samt at

$$\lim_{x\to b}\frac{1}{g}(x)=\frac{1}{\lim_{x\to b}g(x)}$$

$\square$

Bevis. **f**)
Følger af d og e.

$\square$