Opgave 234

Opgave 234

Grænseværdi for en monoton funktion (Bevis for Sætning 6.43 og Sætning 6.45).

(a) Lad $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ **være en voksende og begrænset funktion og sæt** $c = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b)\}$**. Bevis, at** $f(x) \to c$ **for** $x \to b^-$**.**

Bevis Da f er voksende og begrænset gælder det, at $c = \sup\{f(x)\}$, hvor det $\forall x : f(x) \leq c$.

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da kan vi per supremumsegenskaben finde et x, så $c - \varepsilon < f(x) \leq c$ gælder. Da defineres δ til at være $\delta = b - x$.

Da f er voksende vil der for alle $x \in (b - \delta, b)$ gælde at:

$$c - \varepsilon < f(x) \leq c$$

da c netop er mindste øvre grænse. c trækkes fra i hvert led af uligheden, og der ganges derefter med -1:

$$\varepsilon > c - f(x) \geq 0.$$

Da $f(x) \leq c,\ \forall x \in (b - \delta, b)$ så er $|c - f(x)| < \varepsilon$. Da $x \in [a,b)$ må $x < b$ og dermed er $0 < b - x$. Hvoraf det følger at

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \colon 0 < b - x < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$$

Dermed er begge betingelser i Definition 6.41 overholdt og derfor

$$f(x) \to c \text{ for } x \to b^-$$

■

(b) Lad $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ **være monoton og begrænset. Bevis, at** $f(x)$ **har en grænseværdi for** $x \to b^-$**.**

Bevis Lad f være en monoton og begrænset funktion. Af definition 5.21 så er en monoton funktion enten voksende eller aftagende. Hvis $f(x)$ er en voksende funktion følger det af **(a)**, hvis $f(x)$ er en aftagende funktion følger det af **(a)** anvendt på $-f(x)$.

$\blacksquare$

(c) Lad $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ være monoton og begrænset. Bevis, at $f(x)$ har en grænseværdi for $x \to \infty$.

Bevis Lad $A = [a,\infty)$ og $f\colon A \to \mathbb{R}$ være monoton og begrænset. Antag UTAG at f er voksende. Det gælder at:

$$\exists R > 0\colon \{x \in \mathbb{R} \mid x > R\} \subseteq A \tag{1}$$

hvilket er tydeligt hvis $R = |a|$.
Da f er begrænset eksisterer en mindste øvre grænse $c = \sup\{f(x) \mid x \in [a,\infty)\}$.
Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vi finder nu et x', der opfylder, at: $c - \varepsilon < f(x') \leq c$. Vi definerer da K til at være $K = x'$. Så gælder der $\forall x > K$, at

$$c \geq f(x) > c - \varepsilon \iff 0 \leq c - f(x) < \varepsilon$$

Heraf får vi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R}\colon x > K \Rightarrow |c - f(x)| < \varepsilon \tag{2}$$

Da (1) og (2) er opfyldt gælder det per Definition 6.44, at $f(x)$ har en grænseværdi for $x \to \infty$.
$\blacksquare$