Opgaver til kursusgang 241. Grænseværdi fra venstre og højre (Bevis for Sætning 6.42).

Definition 1. *: **Definition 6.32***
Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$, lad $f : A \to \mathbb{R}$ være en reel funktion defineret på A, lad $b \in \mathbb{R}^n$ og $c \in \mathbb{R}$. Vi siger at f har grænseværdien c for x gående mod b, hvis

a) f er defineret i nærheden af b, og

a) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < ||x - b|| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon$.

Opgave 1. *: Lad $A \subseteq \mathbb{R}$, lad $f : A \to \mathbb{R}$ være en reel funktion defineret på A, og lad $b \in \mathbb{R}$. Bevis, at hvis begge grænseværdier $\lim_{x\to b^-} f(x)$ og $\lim_{x\to b^+} f(x)$ eksisterer og*

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^+} f(x), \tag{1}$$

så eksisterer grænseværdien $\lim_{x\to b}$, og den er lig med den fælles værdi af grænseværdierne i ligning (1)

Bevis. I denne opgave skal vi både bevise eksistensen af grænseværdien og at den er den fælles værdi af begge grænseværdier. Først vil vi bevise eksistens ved at bevise der eksisterer en udprikket kugle rundt om grænseværdien hvor f er defineret.

f er defineret i intervallet $]b, b+r_1[$ på højre side, samt $]b-r_2, b[$ på venstre side ud fra definition 6.41 a) i bogen. f er defineret i nærheden af b, hvis der findes en udprikket kugle

$$\dot{B}_r(b) = \{y \in \mathbb{R}^n | 0 < ||y - b|| < r\}, \tag{2}$$

hvor f er defineret. Da f er defineret i intervallet $]b - r_1, b + r_2[\setminus \{b\}$ er f defineret i den udprikkede kugle $\dot{B}_r(b)$, med radius $r = min(r_1, r_2)$, og derfor er eksistensen af grænseværdien $\lim_{x\to b}$ bevist.

Det antages at grænseværdier $\lim_{x\to b^-} f(x)$ og $\lim_{x\to b^+} f(x)$ eksisterer og er den samme, c. Grænseværdierne er bestemt ud fra definition 6.41 i bogen, hvor grænseværdien c for x gående mod b fra højre er defineret som

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : 0 < x - b < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon \tag{3}$$

og grænseværdien c for x gående mod b fra venstre er

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : 0 < b - x < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon \tag{4}$$

Nu vælges et $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, da det mindste δ afparerer i begge instanser.

Der ses nu på ledene fra (3) og (4)

$$0 < x - b < \delta \tag{5}$$

$$0 < b - x < \delta \tag{6}$$

Det er trivielt, at hvis (5) og (6) er sandt, er følgende også sandt

$$0 < ||x - b|| < \delta \tag{7}$$

Hvilket betyder at definition 6.32 for grænseværdier, er opfyldt. ■