Analyse opgave 242

Gruppe 5 - G4-111

Oktober 2016

Sætning 6.46 Grænseværdi for en sammensat funktion. II.
Lad $f\ :]a,\infty[$ og $g\ :]b,\infty[$ være to reelle funktioner således, at $g(x)\ \in]a,\infty[$ for $x\ \in]b,\infty[$.
Bevis, at hvis $g(x) \to \infty$ for $x \to \infty$ og $f(x) \to c$ for $x \to \infty$, så gælder $f(g(x)) \to c$ for $x \to \infty$ (uanset om c $\in \mathbb{R}$ eller $c = \pm\infty$)

Bevis for sætning 6.46 når $c \in \mathbb{R}$:

Vis at $f(g(x)) \to c$ når $x \to \infty$,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k > 0 : x \geq k \implies |f(g(x)) - c| < \varepsilon.$$

Vi har:
$f(x) \to c$ for $x \to \infty$
$g(x) \to \infty$ for $x \to \infty$

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Ud fra definition 6.44 findes der $k > 0$ så $|f(x) - c| < \varepsilon$, når $x \geq k$.

Ifølge definition 6.18 findes der $\tilde{k} > 0$ så $g(x) \geq k$, når $x \geq \tilde{k}$.

Hvis $x \geq \tilde{k}$ så er $|f(g(x)) - c| < \varepsilon$ og det medfører

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{k} > 0 : x \geq \tilde{k} \implies |f(g(x)) - c| < \varepsilon.$$

Bevis for sætning 6.46 når $c = \pm\infty$:

Vis at $f(g(x)) \to \infty$, når $x \to \infty$,

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : x > N \implies f(g(x)) > M.$$

Vi har:
$f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$
$g(x) \to \infty$ for $x \to \infty$

Uden tab af generalitet, vises der kun for $c = +\infty$.
Lad $M > 0$ være vilkårligt. Ifølge definition 4.18 findes der $N > 0$, således at $f(x) > M$ når $x > N$.
Ifølge definition 4.18 findes der $\tilde{N} > 0$ så $g(x) \geq N$ når $x \geq \tilde{N}$.

Hvis $x \geq \tilde{N}$, så er $f(g(x)) > M$ og det medfører

$$\forall M > 0 \exists \tilde{N} \in \mathbb{N} : x \geq \tilde{N} \implies f(g(x)) > M$$

og dermed er det bevist.

$\blacksquare$