Opgave 164

Gruppe 7

December 9, 2016

Opgave 292 - Bevis for L'Hopitals regel om 0/0-udtryk ved grænseovergange $x \to a^-$ og $x \to a$

a) Tilfældet $x \to a^-$

Antag, at f og g er definerede i et interval $]a-\rho, a[$ til venstre for punktet a, og at der gælder

$$f(x) \to 0 \text{ for } x \to a^- \tag{1}$$

$$g(x) \to 0 \text{ for } x \to a^- \tag{2}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to c \text{ for } x \to a^- \tag{3}$$

Bevis, at så gælder der

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to c \text{ for } x \to a^-. \tag{4}$$

Bevis. Lad $\tilde{f}(x) = f(-x)$ og $\tilde{g}(x) = g(-x)$. $\tilde{f}$ og $\tilde{g}$ er da differentiable i intervallet $]-a, -a+\rho[$ og det ønskes bevist, at

$$\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} \to c \text{ for } x \to (-a)^+. \tag{5}$$

Det følger af definitionen af $\tilde{f}$ og $\tilde{g}$, at $\tilde{f}'(x) = -f'(-x)$ og $\tilde{g}'(x) = -g'(x)$, hvilket fra (3) giver

$$\frac{\tilde{f}'(x)}{\tilde{g}'(x)} = \frac{-f'(-x)}{-g'(-x)} = \frac{f'(-x)}{g'(-x)} \to c \text{ for } x \to (-a)^+ \tag{6}$$

Da antagelsen i (6) er tilsvarende den for grænseovergangen $x \to a^+$ i Sætning 7.20 er beviset for (5) analogt med dette, og der fås, at

$$\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = \frac{f(-x)}{g(-x)} \to c \text{ for } x \to (-a)^+ \;\Leftrightarrow\; \frac{f(x)}{g(x)} \to c \text{ for } x \to a^-. \tag{7}$$

■

b) Tilfældet $x \to a$

Antag, at f og g er definerede i nærheden af punktet a, og at der gælder

$$f(x) \to 0 \text{ for } x \to a \tag{8}$$

$$g(x) \to 0 \text{ for } x \to a \tag{9}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to c \text{ for } x \to a \tag{10}$$

Bevis, at så gælder der

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to c \text{ for } x \to a \tag{11}$$

Bevis. Da grænseværdierne

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to c \text{ for } x \to a^+ \tag{12}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to c \text{ for } x \to a^- \tag{13}$$

er bevist hver for sig, følger det af Sætning 6.40, at grænseværdien (11) eksisterer. ■