Sætning 0.1. *Antag, at f og g er definerede i et interval $]a, a+\rho[$ til højre for punktet a, og at der gælder:*

$$f(x) \to 0 \textit{ for } x \to a^+, \tag{1}$$
$$g(x) \to 0 \textit{ for } x \to a^+, \quad \textit{og} \tag{2}$$
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \infty \textit{ for } x \to a^+ \tag{3}$$

Bevis, at så gælder der

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \infty \textit{ for } x \to a^+$$

Bevis. (i) Vi starter med at definere $f(a)$ og $g(a)$ til at være nul, uanset om de allerede er definerede. Derefter er f og g begge definerede og kontinuerte i $[a, a+\rho[$. Vi ved, at f og g er kontinuerte i intervallet $]a, a+\rho[$ fra ovenstående samt sætning 7.5. Derudover ved vi, at f og g er kontinuerte i a jf. (1), (2) og sætning 6.37.

(ii) Antagelsen (3) bevirker, at funktionen $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ er defineret i et interval $]a, a+\rho_1[$ til højre for a, og dermed at $g'(x) \neq 0$ i dette interval. Da $f(x)$ og $g(x)$ begge er defineret på intervallet $]a, a+\rho[$ kan det antages, at $\rho_1 \leq \rho$. Det viser sig, at brøken $\frac{f(x)}{g(x)}$ også er defineret i intervallet $]a, a+\rho_1[$. Lad $a < x < a+\rho_1$. $g(x)$ opfylder antagelserne i middelværdisætningen på intervallet $[a, x]$, og derfor eksisterer der et $\alpha \in]a, x[$ således, at

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(\alpha),$$

som er forskellig fra 0. Da $x \neq a$ og $g(a) = 0$, får vi heraf, at $g(x) \neq 0$.

(iii) Vi skal bevise, at

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 : a < x < a+\delta \implies \frac{f(x)}{g(x)} > M. \tag{4}$$

Vi ved, at

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 : a < x < a+\delta \implies \frac{f'(x)}{g'(x)} > M. \tag{5}$$

Lad nu M være givet, og lad δ være bestemt så det afparerer M i (5). Vi vil nu vise, at samme δ afparerer M i (4). Lad x være vilkårligt valgt, så $a < x < a+\delta$ og betragt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

Da f og g opfylder forudsætningerne i Cauchys middelværdisætning på intervallet $[a, x]$, $\exists \xi \in]a, x[$, så:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{6}$$

Da $a < \xi < x < a + \delta$ gælder jf. $(5), (4)$ og (6):

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > M \tag{7}$$

■