Analyse opgave 62

Gruppe 5 - G4-111

September 2016

Opgave 62

Bevis ved induktion, at hvis $r \geq -1$, så gælder **Bernoullis ulighed** (vist i 1689 af Jakob Bernoulli)

$$(1+r)^n \geq 1 + nr \text{ for } n \in N \tag{1}$$

Hvor i beviset bruger man oplysningen $r \geq -1$

Basisskridt
Antag at $n = 1$

$$(1+r)^1 \geq 1 + 1r \tag{2}$$

$$(1+r) \geq 1 + r \tag{3}$$

Det ses at der er lighed på begge sider af uligheden, så dette udtryk er sandt.

Induktionsskridt
Antag at $n = k$ er sandt og vis derefter at $k + 1$ er sandt

$$(1+r)^{(k+1)} \geq 1 + (k+1)r \tag{4}$$

Ved at bruge potensregler og gange parentesen ud og da vi ved at $(1+r)^k \geq 1+kr$ (induktionsantagelse), fås følgende udtryk

$$(1+r)^k(1+r) \geq (1+kr)(1+r) \tag{5}$$

Hvis $r < -1$ så opfyldes uligheden ikke i ligning (5).
Vi multiplicerer højre sides parenteser

$$= 1 + r + kr + kr^2 \tag{6}$$

Da kr^2 altid er positiv så vil $1+(k+1)r+kr^2$ altid være større end $1+(k+1)r$. Eftersom $(1+r)^{(k+1)} \geq 1+(k+1)r+kr^2 \geq 1+(k+1)r$ så er $(1+r)^{(k+1)} \geq 1+(k+1)r$.
Da antagelsen er sand for $k+1$, så er det også sandt for alle $k \in \mathbb{N}$

$\blacksquare$