Aanalyse 1: Gruppe G4-113

Opgave 76

a) Vis, at ethvert interval $I =]a, b[$ indeholder uendeligt mange irrationale tal.

Proof: (i) Vi starter med at vise at der findes ét irrationalt tal i I når $a > 0$.

$$a > 0,\ I =]a, b[. \tag{1}$$

Ifølge Korollar 3.18 findes der et $n \in \mathbb{N}$, så at $\frac{1}{n} < b - a$ og ifølge Arkimedes' princip findes et $m \in \mathbb{N}$.

$$b - a > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} \Rightarrow na < m \Rightarrow a < \frac{m}{n} \tag{2}$$

Vi adderer så $\sqrt{2}$ til højre siden af $<$ så vi ikke ændre noget ved uligheden. Der henvises så tilbage til resultatet fra opgave 23 (a), hvor der blev vist at

$$r \ \in \ \mathbb{Q} \,\text{og}\, s \ \in \ \text{Irr} \ \Rightarrow \ r + s \ \in \ \text{Irr}. \tag{3}$$

Så der står nu et irrationalt tal på højre siden.

$$a < \frac{m}{n} + \sqrt{2}. \tag{4}$$

Vi har også at der findes et mindste m, som vi kalder $\bar{m}$

$$\bar{m} = \min\{m \ \in \ \mathbb{N} | a < \frac{m}{n} + \sqrt{2}\}. \tag{5}$$

Men da $\bar{m}$ er det mindste element så gælder der at

$$\Rightarrow \frac{\bar{m}}{n} + \sqrt{2} > a \,\text{og}\, \frac{\bar{m} - 1}{n} + \sqrt{2} \leq a \tag{6}$$

$$a < \frac{\bar{m}}{n} + \sqrt{2} = \frac{\bar{m} - 1}{n} + \sqrt{2} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b, \tag{7}$$

hvilket giver

$$\Rightarrow a < \frac{\bar{m}}{n} + \sqrt{2} < b, \text{ hvor } \frac{\bar{m}}{n} + \sqrt{2} \ \in \ \text{Irr}. \tag{8}$$

(ii) Vi lader nu a være vilkårlig, men sådan at $b > a$. Vi skal så vise at der findes et irrationalt tal, lad os kalde det c, i intervallet $I =]a, b[$. Fra (i) ved vi at der er et irrationalt tal for $a > 0$ og vi indfører derfor et $n \ \in \ \mathbb{N}$ sådan at

$$a' = a + n > 0,\ b' = b + n, \tag{9}$$

så vi har samme scenarie som i (i). Derfra ved vi at der er minimum ét irrationalt tal i intervallet. Derefter vil vi igen kunne trække n fra a' og b' så vi kommer tilbage til intervallet $I =]a, b[$. Derved gælder det at der for alle værdier af a og b er minimum ét irrationalt tal i intervallet $I =]a, b[$.

(iii) Vi vil nu vise at vi kan finde uendeligt mange irrationale tal. Først Kald c fra (ii) c_1 betragt $]a, c_1]$:.

$$]a, c_1[\subset]a, b[, \quad \text{Find } c_2 \in]a, c_1[\cap \text{Irr}, \tag{10}$$

Hvor vi ved fra (i) at der er et irrationalt tal i et åbent interval så c_2 kan findes mellem a og c_2. Vi kan så lave et nyt interval med c_2, hvor vi finder c_3 osv. Derfor gælder det, at der er unedeligt mange irrationale tal i intervallet $I =]a, b[$.

$$c_{n+1} \in]a, c_n[\cap \text{Irr} \tag{11}$$

b) Bestem $\sup(B)$ og $\inf(B)$, idet $B =]a, b[\cap \text{Irr}$. Vi starter med at bestemme $\sup(B)$. Vi ved fra **a)** at der findes uendeligt mange irrationale tal i et interval, og derfor at $]a, a + \epsilon[\cap \text{Irr} \neq \emptyset$. Da $\forall x \in B : b \geq x$, så er $\sup(B) \leq b$. Vi antager for modstrid, at $\sup(B) < b$. Vi vælger $c \in]\sup(B), b[\cap \text{Irr} \subseteq B$. Så gælder det, at $c \in B$ og $c > \sup(B)$. Dette er en modstrid og derfor er $\sup(B) = b$.
Det samme gøres når $\inf(B)$ skal findes, hvor retningen af uligheden vendes og der kigges på $]a, \inf(B)[$. Med samme argument som for $\sup(B)$ gælder det derfor, at $\inf(B) = a$.