Opgave 83

I denne opgave skal man bevise, at hvis A er en delmængde af $\mathbb{R}$ med følgende egenskab:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x, y \in A \text{ og } x < z < y \quad \Rightarrow \quad z \in A, \tag{1}$$

Så er A enten et interval eller en mængde bestående af ét element.
Antag derfor, at A opfylder (1) og at A indeholder mere end ét element.
a) Betragt først det tilfælde, hvor A er både opad og nedad begrænset, og sæt $\alpha = \inf A$, $\beta = \sup A$.

a1)

Bevis, at $\alpha < \beta$ og at $A \subseteq [\alpha, \beta]$.

Da A er ikke-tom og opad begrænset, så følger det af supremumsegenskaben, at $\beta = \sup A$ eksisterer og dermed

$$a \in A \Rightarrow a \leq \beta \tag{2}$$

Da A er ikke-tom og nedad begrænset, følger det af infimumegenskaben, at $\alpha = \inf A$ eksisterer og dermed

$$a \in A \Rightarrow a \geq \alpha \tag{3}$$

Da følger det af (2) og (3), at

$$A \subseteq [\alpha, \beta]$$

■

a2)

Bevis, at $]\alpha, \beta[\subseteq A$.

Antag derfor, at $z \in]\alpha, \beta[$
Da $\beta = \sup A$, kan vi anvende sætning 3.11 (d):

$$z < \beta \Rightarrow (\exists x \in A : x > z)$$

Her fås, at $\alpha < z < x \leq \beta$, hvis der ikke eksisterer et sådan $x \in A$, ville z være en øvre grænse for A, hvilket er modstrid med $z < \sup A$.

På baggrund af sætning 3.11 (d) og korollar 3.16 kan der skrives

$$\alpha < z \Rightarrow (\exists y \in A : y < z)$$

Her fås, at $\alpha \leq y < z < \beta$, hvis der ikke eksisterer et sådan $y \in A$, ville z være en nedre grænse for A, hvilket er en modstrid for $z > \inf A$.

Da vi således har $y < z < x$ for $y, x \in A$, så følger det af (1), at $z \in A$. Da z var vilkårligt valgt i $]\alpha, \beta[$, så har vi altså, at $]\alpha, \beta[\subseteq A$

■

a3)

Slut af (a1) og (a2), at A er et interval.
Da vi har vist, at $]\alpha, \beta[\subseteq A \subseteq [\alpha, \beta]$ kan det afgøres, at A er et interval.

$\blacksquare$

b)

Betragt så det tilfælde, hvor A er nedad, men ikke opad begrænset, og sæt $\alpha = \inf A$ Vis først at $A \subseteq [\alpha, \infty[$ og derefter, at $]\alpha, \infty[\subseteq A$.

Pr. definition 3.9 gælder:

$$a \in A \Rightarrow a \geq \alpha$$

Dermed er

$$A \subseteq [\alpha, \infty[$$

Lad $z \in]\alpha, \infty[$, så kan sætning 3.11 (d) og korollar 3.16 bruges

$$\exists y \in A : y < z$$

Her fås, at $\alpha < y < z$, hvis der ikke eksisterer et sådan $y \in A$, ville z være en nedre grænse for A, hvilket er modstrid med $z > \inf A$. Da A ikke er opadtil begrænset, findes $x \in A$ så $z < x$. Da $y < z < x$, $x, y \in A$ giver (1), at $z \in A$, som viser, at $]\alpha, \infty[\subseteq A$, da $z \in]\alpha, \infty[$ var vilkårligt valgt.

Da vi har vist, at $]\alpha, \infty[\subseteq A \subseteq [\alpha, \infty[$ kan det afgøres, at A er et interval.

$\blacksquare$

c1)

Betragt det tilfælde, hvor A kun er opad begrænset.

Resultatet følger af b) anvendt på $-A$.

$\blacksquare$

c2)

Betragt endelig det tilfælde, hvor A hverken er opad eller nedad begrænset.

Lad $z \in \mathbb{R}$. Da A hverken er opadtil eller nedadtil begrænset, findes $x, y \in A$, så $x < z < y$. Men så giver (1), at $z \in A$.

$\blacksquare$

Nu kan vi konkludere ud fra **a)**, **b)** og **c)**, at A er et interval.